

Everything Maths

Graad 10 Wiskunde – Onderwysersgids

'n Inleiding tot Everything Maths vir Graad 10

deur Siyavula en vrywilligers



basic education
Department:
Basic Education
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA



SHUTTLEWORTH
FUNDED

Everything Maths

Grade 10 Wiskunde

Weergawe 1 – CAPS

deur Siyavula en vrywilligers

ISBN: 978-1-920423-11-7

Kopiereg kennisgewing

Jou wetlike vryheid om hierdie boek te kopieer

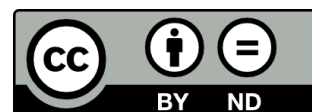
Jy mag enige gedeelte van hierdie boek vrylik kopieer, trouens ons moedig jou aan om dit doen. Jy kan dit soveel keer as jy wil fotostateer, uitdruk of versprei. Jy kan dit op jou selfoon, iPad, rekenaar of geheue stokkie aflaai. Jy kan dit selfs op 'n kompakskyf (CD) brand of dit vir iemand per e-pos aanstuur of op jou eie webblad laai. Die enigste voorbehoud is dat jy die boek, sy omslag en die kortcodes onveranderd laat.

Vir meer inligting oor die Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported (CC BY-ND 3.0) lisensie besoek <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>

Lys van skrywers

Siyavula kernspan

Bridget Nash, Alison Jenkin, Marina van Zyl, Nicola du Toit, Heather Williams, Carl Scheffler



Everything Maths

Ons dink oor die algemeen aan Wiskunde as 'n vak oor getalle, maar eintlik is Wiskunde 'n taal. As ons dié taal leer praat en verstaan kan ons baie van die natuur se geheime ontdek. Net soos ons iemand se taal moet verstaan om meer van hom/haar te leer, moet ons wiskunde gebruik om meer te leer van alle aspekte van die wêreld – of dit nou fisiese wetenskappe, lewenswetenskappe of selfs finansies of ekonomie is.

Die vernaamste skrywers en digters het 'n gawe om woorde só te gebruik dat hulle mooi en inspirerende stories kan vertel. Net so kan ons wiskunde gebruik om konsepte te verduidelik en nuwe dinge te skep. Baie van die moderne tegnologie wat ons lewens beter en makliker maak, is afhanklik van wiskunde. DVDs, Google soektogte en bankkaarte wat met 'n PIN werk, is maar net 'n paar voorbeelde. Woorde het nie ontstaan om stories te vertel nie, maar die bestaan daarvan maak dit moontlik. Net so is die wiskunde wat gebruik is om hierdie tegnologie te ontwikkel, nie spesifiek vir hierdie doel ontwikkel nie. Die uitvinders kon egter bestaande wiskundige beginsels gebruik wanner en waar die toepassing daarvan nodig was.

Trouens is daar nie 'n enkele faset van die lewe wat nie deur wiskunde geraak word nie. Baie van die mees gesogte beroepe is afhanklik van wiskunde. Siviele ingenieurs gebruik wiskunde om te bepaal hoe om die beste, nuwe ontwerpe te maak. Ekonomie gebruik wiskunde om te beskryf en voorspel hoe die ekonomie sal reageer op sekere veranderinge. Beleggers gebruik wiskunde om die prys van sekere soorte aandele te bepaal of om die risiko verbonde aan sekere beleggings te bereken. Wanneer sagteware-ontwikkelaars programme soos Google skryf, gebruik hulle baie van die wiskundige algoritmes om die programme bruikbaar maak.

Selfs in ons daaglikse lewens is wiskunde oral – in die afstand wat ons aflê, tyd en geld. Ons kan ook in kuns, ontwerp en musiek die invloed van wiskunde sien, veral in die proporsies en musikale klanke. Hoe beter ons vermoë om wiskunde te verstaan, hoe beter ons vermoë om die natuur en die skoonheid daarvan te waardeer. Wiskunde is daarom nie net 'n abstrakte dissipline nie, dit omarm logika, simmetrie, harmonie en tegnologiese vooruitgang. Meer as enige ander taal is wiskunde oral en universeel in sy toepassing.

Kyk na die video inleiding van Dr. Mark Horner:  VMIwd by www.everythingmaths.co.za

Meer as net 'n handboek



Everything's Maths is nie net 'n Wiskunde handboek nie. Daar is meer in as net die gewone inhoud wat jy van 'n skoolhandboek verwag. Om mee te begin kan jou leerders die boek aflaai of aanlyn lees op hul selfoon, rekenaar of iPad. Dit is daarom gerieflik beskikbaar waar ook al jy is.

Ons weet dat dit partykeer moeilik is om iets in woorde te verduidelik, daarom is daar lesse en verduidelikings in video-formaat by elke hoofstuk sodat die idees en konsepte vir jou leerders realiteit kan word. Die aanbieding aan die einde van elke hoofstuk bied 'n oorsig oor al die inhoud wat leerders geleer het, en die kern konsepte is vir hulle uitgelig sodat hulle die maklik kan hersien.

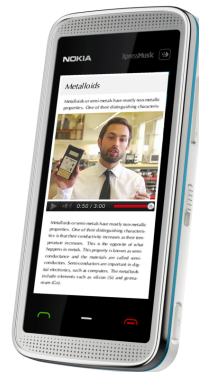
Al die oefeninge in die boek het 'n skakel na 'n diens wat vir leerders nog oefeninge gee, die oplossings gee of hulle toelaat om hulle vaardigheid te toets – op 'n selfoon of 'n rekenaar.

Ons wil weet wat jy - die opvoerder - dink, en waarom jou leerders wonder, waarmee hulle sukkel terwyl hulle deur die boek werk en die oefeninge probeer doen. Ons het dit daarom moontlik gemaak dat opvoeders en leerders hulle werk, met 'n selfoon of rekenaar, digitaal kan "aansteek" op 'n bladsy en dan ook te kan sien watter vrae en antwoorde ander lesers "aangesteek" het.

Lees dit op jou selfoon of rekenaar

Leerders het altyd toegang tot die handboek, of hulle by die huis, die skool of op 'n trein is. Hulle kan deur na die aanlyn weergawe van Everything Maths op hul selfoon, "tablet" of rekenaar blaai. As hulle dit wil lees terwyl hul van lyn af is, kan hulle dit as 'n PDF-leër of in e-boek formaat aflaai. Leerders kan ook toegang Everything Maths en Everything Science vir nie net Graad 10 nie, maar ook vir Graad 11 en 12 op hulle selfoon! Daar is nou geen verskoning vir 'n leerder nie hierdie handboeke in die voorkant van hulle in die klas!

Om die handboek op 'n selfoon of rekenaar te lees, verwys leerders na:
www.everythingmaths.co.za



Gebruik die ikons en kortcodes

Die ikons in die boek help jou en jou leerders om te sien waar videos, aanbiedinge, oefeninge en ander hulp voorkom. Die kortcodes langs die ikons laat jou toe om direk na die aanlyn-bron te blaai sonder om daarvoor te soek. Gaan na die Everything Maths webblad by www.everythingsmaths.co.za en voer die kortkode in die soek-blokkie in.



(A123) Gaan direk na 'n afdeling



(V123) Video, simulاسie of aanbieding



(P123) Oefen en toets jou vaardighede



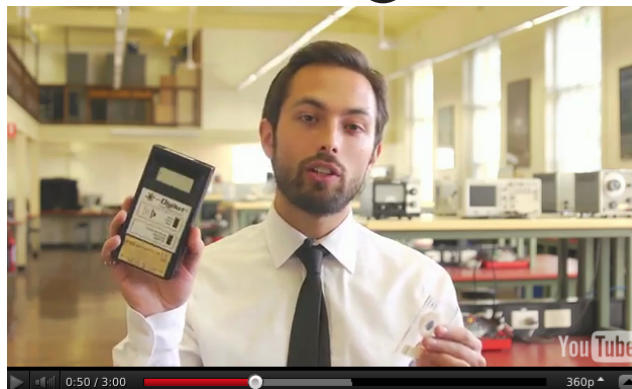
(Q123) Vra vir hulp of vind 'n antwoord

Video-lesse

Soek die video ikons in die boek. Hierdie ikons neem jou na video-lesse wat sal help om die idees en konsepte vir jou lewendig te maak. Leerders kan ekstra insigte, volledige verduidelikings en uitgewerkte voorbeelde hier sien. Die konsep word prakties voorgestel en jy kan luister hoe regte mense wiskunde en wetenskap in hul werk gebruik.

Dit is 'n goeie manier vir jou tegnologie in jou klaskamer te bring - die video's kan 'n bykomende opsomming van die begrippe wat jy gedek het deur die aanbied van 'n alternatiewe verduideliking. Na-ure, sal leerders wat addisionele hulp moet weet dat hulle die video's kan sien in hulle eie tyd, met die bonus in staat is om te stop, breek en die verduideliking rewind totdat hulle die konsep ten volle begryp. Dit is ook ideaal vir hersiening, want dit is soos 'n persoonlike onderwyser aan die hand vir elke leerder, te eniger tyd!

Sien video verduideliking  (Video: V123)

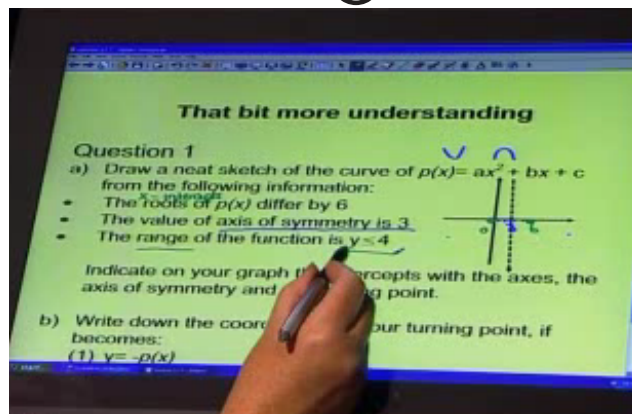


Video oefeninge

As daar oefeninge in die boek is, sal jy die ikons en kortcodes vir video-oplossings, oefeninge en hulp sien. Hierdie short-codes vat jou na die video-oplossings van sommige oefeninge sodat jy stap-vir-stap kan sien hoe om die probleem op te los. Moedig jou leerders om hierdie video oefeninge, wat 'n groot vir hersiening, sowel as om toegang te verkry tot jou eie onderrig te versterk. Jy kan toegang tot die videos kry deur:

- hulle aanlyn op jou selfoon of rekenaar te kyk
- die videos af te laai sodat jy die van lyn af op jou selfoon of rekenaar kan kyk.
- 'n DVD te bestel wat jy op jou TV of rekenaar kan speel.
- dit van lyn af af te laai met Bluetooth of Wi-Fi van sekere afsetpunte

Sien video oefening  (Video: V123)



Om nog videos te sien, of vir meer inligting, besoek die Everything Maths webblad vanaf jou selfoon of rekenaar by www.everythingmaths.co.za

Stel toetse met Monassis op

Siyavula bied 'n oop aanlyn assesseringsbank, genoem Monassis, aan, vir die deel en toegang tot kurrikulum belynde toets- en eksamen vrae met antwoorde. Al die vrae en oplossings wat in die handboek gevind word, is beskikbaar op Monassis. Daarbenewens stel hierdie webwerf opvoeders in staat om vinnig toetse en vraestelle op te stel deur items van die databasis te kies en dit by hul toetse te voeg. Opvoeders kan dan die toets en memorandum, wat gereed is om gedruk te word, afsonderlik aflaai. Monassis bied ook die opsie aan opvoeders om hul leerders se punte in te voer om 'n verskeidenheid diagnostiese verslae oor die leerders se vordering terug te kry.

monassis

Find & contribute questions.
Make life easier for yourself & thousands of other teachers.

Browse Questions Find Questions Contribute Questions

Find Questions

14 questions matched your search criteria.

Sort on: newest popular likes views

Modify the following circuit diagram with two ammeters **A1** and **A2** at different locations in the circuit diagram to measure the current through **R1**. Then add voltmeter **V1** to measure the potential difference in **R2** and voltmeter **V2** to measure the potential difference across **R2** and **R3**.

Like 0 likes, 0 dislikes

View

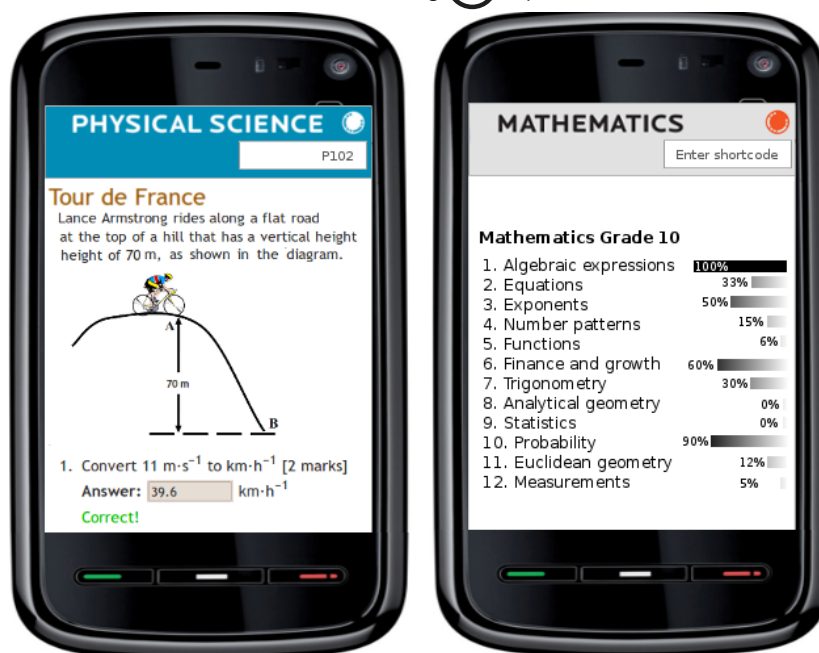
14 June 2011 · Heather Williams · 0 marks · 0 mins

Ons moedig jou aan om gebruik te maak van die eenvoudige funksionaliteit wat jou help deur tyd te spaar met die opstel van toetse en die analyse van leerders se punte. Vir meer inligting besoek www.monassis.com.

Intelligente oefening vir leerders

Een van die beste maniere om vir die leerders voor te berei vir toetse en eksamens is om te oefen om dieselfde soort vrae wat hulle sal getoets word te beantwoord. By elke stel oefening sal jy sien 'n oefening ikoon en kort-kode. Vir leerders om te oefen en om hul vaardighede te toets, verwys hulle na www.everythingmaths.co.za op hulle selfoon of rekenaar, en voer die kort-kode in die boks. Hierdie aanlyn oefening op selfoon of rekenaar sal boekhou van leerders se prestasies en vordering, vir hulle terugvoer gee oor areas wat meer aandag benodig en voorstelle maak oor seksies en videos om na te kyk.

Sien meer oefening **A⁺** (QM123)



Die sagteware kan enige aantal vrae met dieselfde struktuur, maar verskillende besonderhede, genereer b.v. die numeriese waardes in fisika of wiskunde probleme kan elke keer verander, maar die soort vraag kan dieselfde bly. Dit laat baie meer verskeidenheid as 'n tradisionele vraag bank toe, tot die mate dat verskillende oefentoetse outomaties geskep kan word vir elke student in die klas. Die stelsel genereer ook 'n memorandum saam met elke toets, en volg die leerders se konseptuele begrip deur middel van hul sukses om verskillende tipes vrae te beantwoord.

Hierdie hulpmiddel het ten doel om die sterk- en swakpunte te ontdek in die leerders se begrip soos die leerders vorder, deur middel van uitgewerkte voorbeelde en eksamen probleme. Deur te weet watter begrippe leerders mee sukkel, kan die stelsel nuttige dinge doen soos

- meer oefening voorsien oor die tipe vrae waarmee die leerder sukkel;
- hersieningsmateriaal aanbeveel uit vrylik beskikbare opvoedkundige hulpbronne (byvoorbeeld, Siyavula se Everything Maths en Everything Science handboeke);
- terugvoering vir leerders, opvoeders en ouers gee; verslae oor leerders se vordering en oor die spesifieke konsepte waarvoor hulle meer aandag moet gee.

Die bogenoemde word gedoen elke leerder op 'n individuele basis, die lewering van 'n persoonlike oefening- en hersieningsskedule wat by sy of haar pas en begrip pas.

Help leerders om antwoorde te vind

Ons verstaan dat onderwysers nie altyd beskikbaar is wanneer 'n leerder 'n vraag het nie, veral na-ure. Jou leerders kan nou die handboek op hul selfoon of rekenaar oopmaak. Leerders moet die kort-kodes op artikel opskrifte gebruik om na die plek in die boek, en die kort-kodes vir die oefeninge vir die hulp met spesifieke vrae.



(P78) Besoek hierdie afdeling om vrae te kyk of te pos



(QM123) Vra vir hulp of vind 'n antwoord

known as the $(ax + b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$ then their product is:

Highlight text & ask a question about it!

Ask your question here....

CHAPTER 1. ALGEBRAIC EXPRESSIONS

1.5

The product of two identical binomials is known as the square of the binomial and is written as:

If the two terms are $ax + b$ and $ax - b$ then their product is:

$$(ax + b)(ax - b) = a^2x^2 - b^2$$

This product is known as the difference of two squares.

(1.7)

New tag

Shared Save Cancel

Vertel ons hoe om die boek te verbeter

As jy enige kommentaar, gedagtes of voorstelle op die boeke, besoek www.everythingmaths.co.za, oorskakel na die opvoeder af, en die gebruik van ons annoteerder instrument, kan jy vang dit in die teks. Dit kan wissel van wenke en idees te deel met jou mede-opvoeders, om te bespreek hoe om beter konsepte in die klas verduidelik. Ook, as jy enige foute in die boek opgetel het, kan jy 'n kennis van hulle hier maak, en sal ons hulle in die tyd vir die volgende oplaag korrekte.

Electromagnetic Radiation

Summary

1. Introduction

This chapter will focus on the **electromagnetic (EM) radiation**. Electromagnetic radiation is a self-propagating wave in space with electric and magnetic fields perpendicular to each other and to the direction of **propagation**, and are in phase with each other. Electromagnetic radiation is classified into different types, include, in order of increasing frequency, radio waves, microwaves, infrared radiation, visible light, ultraviolet radiation, X-rays and gamma rays.

2. Particle/wave nature of electromagnetic radiation

If you watch a colony of ants walking up the wall, they look like a thin continuous black line. But as you look closer, you see that they are made up of individual ants.

Light and all other types of electromagnetic radiation seems like a continuous wave at first, but when one performs experiments with it, it shows particle-like properties. Just like the individual ants, the light can also be made up of individual bundles of energy, or quanta of light.

Light has both wave-like and particle-like properties (wave-particle duality), but only shows one or the other, depending on the kind of experiment. In a wave-type experiment, light shows wave nature, and a particle-type experiment shows particle nature. One cannot test the wave and the particle nature at the same time.

I	Inleiding	1
1	Inleiding	3
1.1	Ondersteuning vir opvoeders	3
1.2	Op die web, kan enige een 'n wetenskaplike wees	6
1.3	Blog posts	8
1.4	Oorsig	10
1.5	Assessering	19
1.6	Hoofstuk Kontekste	37
II	Oplossings	41
1	Algebraïese uitdrukkings	43
2	Vergelykings en ongelykhede	61
3	Eksponensiale	83
4	Getalpatrone	91
5	Funksies	95
6	Finansies en groei	115
7	Trigonometrie	125
8	Analitiese meetkunde	143
9	Statistiek	159
10	Waarskynlikheid	171
11	Euclidean geometry	183
12	Measurements	207

Deel I

Inleiding

Ondersteuning vir opvoeders

Die onderrig van wetenskap behels meer as fisika, chemie en wiskunde...Dit leer jou om te dink en probleme op te los; al twee waardevolle vaardighede wat jy in alle fasette van die lewe kan toepas. Dit is belangrik dat die nuwe generasie hierdie vaardighede aanleer, veral in die huidige globale omgewing waar metodologie, tegnologie en hulpmiddels vinnig ontwikkel. Die onderwys behoort by hierdie ontwikkeling te baat. In ons eenvoudige model is daar drie maniere hoe tegnologie jou onderrig en onderrigmillieu kan beïnvloed.

Eerste Manier: Samewerking/Medewerking van Onderwysers

Daar is baie hulpmiddels wat onderwysers kan help om meer effektief saam te werk. Ons weet dat leergemeenskappe waar daar saam geoefen word, die ideale geleentheid bied vir die verfyning van metodologie, inhoud en kennis asook goeie ondersteuning bied aan onderwysers. Een van die grootste uitdagings wat sulke leergemeenskappe in die gesig staar, is die tyd en spasie om voldoende byeenkomste te hê om optimale gemeenskappe te bou en oefeninge, inhoud en leermetodes effektief uit te ruil. Tegnologie is die oplossing – dit transendeer ruimte en tyd. Ons kan nou oor groot afstande (ruimte transendeer) en wanneer dit vir alle partye geleë is (tyd transendeer) virtueel saamwerk (deur e-pos, selfoon, aanlyn ens.)

Die doel van ons handboek is daarom heroorweeg met inagneming van inligting wat op die Connexions webblad beskikbaar is (<http://cnx.org/lenses/fhsst>). Die inhoud op hierdie webblad is maklik toeganklik en aanpasbaar aangesien dit onder oop lisensie is, in 'n oop formaat gestoor kan word, gebaseer is op 'n oop standaard en 'n oop bronne beleid, en ook gratis is, wat almal toelaat om hul eie boeke te kan vervaardig. Die inhoud op Connexions is beskikbaar onder oop kopiereg lisensie – CC-BU. Hierdie Creative Commons By Attribution License stel ander in staat om inhoud regmatig te versprei, te verander, op te skerp, en om jou eie werk te skep deur dié inhoud as basis te gebruik. Die inhoud kan, selfs kommersiële gebruik word, solank die oorspronklike skrywer krediet kry vir hul oorspronklike skepping. Dit beteken dat leerders en opvoeders wettig die inligting kan aflaai, kopieer, deel en versprei sonder vergoeding. Dit bied ook aan opvoeders die vryheid om die inligting te proeflees, te verander, te vertaal en te kontekstualiseer vir hul eie behoeftes.

Connexion is 'n hulpmiddel waar individuele inligting kan deel, maar belangriker help dit gemeenskappe om te vorm rondom die samewerkende, ontwikkeling van bronne aanlyn. Jou gemeenskap opvoeders kan daarom:

- werkswinkels aanlyn skep oor die inhoud;
- eie kopieë van die inhoud maak;
- sekere dele aanpas om hul behoeftes te bevredig;
- dele van hul eie kopie aanpas

- hul eie inhoud bysit of bestaande inhoud met hul eie werk vervang;
- ander inhoud wat gedeel is, in hul werk gebruik;
- as 'n gemeenskap hul eie notas/handboek/kursusmateriaal skep.

Opvoeders wil gereeld assesseringstake deel aangesien dit hul werkslading verminder, verskeidenheid vergroot en kwaliteit bevorder. Alle oplossings vir die oefeninge in hierdie boek is op ons gratis en oop databasis vir assessering, Monassis (www.monassis.com), opgelaa. Elke oefening het 'n shortcode wat gekoppel is aan sy oplossing op Monassis. Om by hierdie oplossing uit te kom, gaan eenvoudig na www.everythingmaths.com, voer die shortcode in, en jy sal by die oplossing op Monassis uitkom. Monassis is soortgelyk aan Connexion, maar is meer gefokus op die deel van assesseringstake. Monassis bevat 'n versameling toetse en eksamens (met oplossings), wat onderwysers vrylik deel met mekaar. Onderwysers kan ook inligting op die databasis soek vir spesifieke vakke of grade en kan ook relevante items by 'n toets sit. Die webblad genereer outomaties 'n toets- of eksamen vraestel, met 'n memo, wat beskikbaar is om af te laai.

Al die oefeninge aan die einde van die verskillende hoofstukke (met hul antwoorde), word op die web gelaai as deel van hierdie oop databasis. Sodoende kan die groter gemeenskap van opvoeders in Suid-Afrika toegang kry tot 'n wye verskeidenheid inhoud wat hulle in toetse en eksamens kan gebruik. Meer inligting oor die gebruik van Monassis as hulpmiddel vir samewerking is vervat in die afdeling oor Monassis.

Tweede Manier: Klaskamerbetrokkenheid

Ten spyte van 'n indrukwekkende verskeidenheid media wat as oop opvoedkundige hulpbronne gratis aanlyn beskikbaar is (soos videos, simulاسies, oefeninge en aanbiedinge), gebruik slegs 'n handjie vol opvoeders hierdie hulpbronne. Ons ondersoek het bewys dat die oorweldigende hoeveelheid, oorwegend internasionale konteks, en die feit dat dit moeilik is om dit met ons plaaslike kurrikulum se aanslag te vereenselwig, onderwysers afskrik. Hierdie hulpbronne kan, as hulle reg gebruik word, die leeromgewing soveel meer innemend/interessant maak.

1b Daar is soveel beter maniere om inligting lewe te gee deur verskillende aanbiedinge as om net die swartbord te gebruik. Dit bied jou die geleentheid om:

- meer grafiese uitbeeldings van die inhoud te skep;
- die tydsberekening van aanbiedinge meer effektief te beheer;
- te verseker dat leerders die les onthou as dit goed uiteengesit word;
- later notas by die aanbieding te voeg;
- kern assesseringskonsepte vooraf vas te lê om bespreking aan te moedig; en
- ander media soos videos vas te lê

Die gebruik van videos is bevind om potensiaal innemend en effektief te wees. Dit bied die geleentheid om:

- 'n alternatiewe verduideliking te bied;
- wanbegrippe aan te spreek sonder om 'n individueel uit te sonder; en
- 'n omgewing of eksperiment te wys wat nie in die klas nageboots kan word nie, omdat dit te duur of te gevaarlik is.

Simulasies is ook handig en kan leerders toelaat om:

- meer vryheid te hê om te ondersoek, eerder as net vaste en beperkte eksperimente en prosesse te dupliseer;
- duur of gevaarlike omgewings meer effektief te ondersoek; en
- oimplisiete wanbegrippe te oorkom.

Ons het reeds 'n versameling mediabronne vasgelê by die relevante afdeling, soos videos, aanbiedinge, simulاسies en skakels, in die aanlyn weergawe van Everything Maths en Everything Science. Dit bied onderwysers nie alleenlik 'n verskeidenheid van plaaslike, relevante en kurrikulumbaseerde bronne nie, maar hierdie bronne word ook sorteer volgens graad en afdeling. Skakels na aanlynbronne is opgeteken in die gedrukte- en PDF-weergawes van hierdie boek. Die bronne word dus toergidse of betroubare rigtingwysers na die wêreld van aanlyn mediabronne.

Derde Manier: Buite die Klaskamer

Die internet bied baie geleentheid vir selfstudie en deelneming wat nooit van tevore moontlik was nie. Daar is reus onafhanklike video-argiewe soos die Khan Academy wat die meeste Wiskundebeginsels van Graad 1 – 12 asook daardie Wetenskaponderwerpe wat nodig is vir die FET bevat. Hierdie videos, as hulle nie in die klas gebruik word nie, bied ook geleenthede vir die leerder om:

- inhoud self op te soek;
- vooruit te werk;
- onafhanklik te hersien en hul basis te versterk; en
- 'n onderwerp te ondersoek om te kyk of hulle dit interessant vind.

Daar is ook baie geleenthede vir leerders om deel te neem aan aanlyn wetenskapprojekte (kyk na die afdeling oor citizen cyberscience “Op die web, kan enige een 'n wetenskaplike wees”). Daar is nie net simulاسies of tutoriale nie, maar regte wetenskap ook, sodat leerders:

- kan waardeur hoe wetenskap verander;
- maklik en veilig vakkant kan ondersoek wat hulle nooit voor universiteit mee sou kennis gemaak het nie;
- bydra tot regte wetenskap (regte internasionale baanbreker wetenskaplike programme);
- die geleentheid het om regte ontdekkings te maak, selfs van hul rekenaarlaboratorium by die skool; en
- aktiewe rolmodelle in die wetenskap kan vind.

In ons boek het ons geleenthede vasgelê wat onderwysers sal help en bronne beskikbaar gestel waarby die leerders sal baat sonder om oorweldig te word deur al die inhoud wat aanlyn beskikbaar is.

Verklarings (annotasies) van die boek

Indien jy enige kommentaar, opinies of voorstelle oor die boeke het, kan jy www.everythingmaths.co.za besoek en dit as teks vasvang wanneer jy as opvoeder ingeteken is. Hierdie kommentaar kan enige iets wees van raad en idees wat jy met ander onderwyser deel tot besprekings oor hoe om konsepte beter in die klas te verduidelik wees. Jy kan ook hier 'n nota maak oor enige foute wat jy in die boek opgetel het, en ons sal dit betyds vir die volgende druk regstel.

Op die web, kan enige een 'n wetenskaplike wees

Het jy geweet dat jy proteïen molekules, jag kan vou vir 'n nuwe planete rondom die verre sonne of simuleer hoe 'n mens malaria in Afrika versprei, almal van 'n gewone PC of laptop met die internet verbind? En jy hoef nie aan 'n gesertifiseerde wetenskaplike om dit te doen. Om die waarheid te sê sommige van die mees talentvolle bydraers tieners. Die rede hoekom dit moontlik is, is dat wetenskaplikes leer hoe om eenvoudige wetenskaplike take te omskep in 'n mededingende aanlyn speletjies.

Dit is die verhaal van hoe 'n eenvoudige idee van die deel van wetenskaplike uitdagings op die web het in 'n wêreldwye tendens, genaamd burger cyberscience. En hoe kan jy 'n wetenskaplike op die web ook.

Op soek na Little Green Men

'n lank tyd gelede, in 1999, toe die World Wide Web skaars tien jaar oud was en niemand het gehoor van Google, Facebook of Twitter, 'n navorser by die Universiteit van Kalifornië in Berkeley, David Anderson, van stapel gestuur om 'n aanlyn projek SETI@home. SETI staan vir "Search for Extraterrestrial Intelligence". Op soek na die lewe in die buitenste ruimte. Alhoewel dit klink soos die wetenskap fiksie, is dit 'n werklike en baie redelike wetenskaplike projek. Die idee is eenvoudig genoeg. Indien daar vreemdelinge wat daar is op ander planete, en hulle is so slim of selfs slimmer as ons, dan is hulle byna seker uitgevind het die radio. So as ons luister baie versigtig vir die radio seine uit die buitenste ruimte, kan ons haal die flou seine van intelligente lewe.

Presies wat radio-uitsendings vreemdelinge sal produseer, is 'n kwessie van 'n debat. Maar die idee is dat as hulle dit doen, sou dit klink heel anders as die normale spot van die agtergrond radio geraas geproduseer deur die sterre en sterrestelsels. Dus as jy lank genoeg soek en hard genoeg nie, miskien sal jy vind 'n teken van die lewe.

Dit was duidelik aan Dawid en sy kollegas dat die soektog gaan 'n klomp van rekenaars te vereis. Meer as wetenskaplikes kon bekostig. So het hy geskryf het 'n eenvoudige program op die rekenaar wat die probleem gebreek af in kleiner dele, die stuur van 'n stukkies van die radio data wat ingesamel is deur 'n reuse-radio-teleskoop vrywilligers oor die hele wêreld. Die vrywilligers het ingestem om 'n program af te laai op hul eie rekenaars nie wat jou sal sif deur die bietjie van die data wat hulle ontvang het het, op soek na die seine van die lewe, en stuur 'n kort opsomming van die resultate terug na 'n sentrale bediener in Kalifornië.

Die grootste verrassing van hierdie projek is nie dat hulle 'n boodskap uit die buitenste ruimte ontdek. Om die waarheid te sê, na meer as 'n dekade van soek, het geen teken van buitenaards lewe is gevind, maar daar is steeds groot gebiede van die ruimte wat nog nie gekyk is. Die grootste verrassing was die aantal mense wat bereid is om so 'n poging om te help. Meer as 'n miljoen mense het die sagteware afgelaai, die maak van die totale rekenaar krag van SETI@home mededinger van selfs die grootste super in die wêreld.

Dawid was diep beïndruk deur die entoesiasme van die mense om hierdie projek te help. En hy het besef dat die soek vir vreemdelinge was waarskynlik nie die enigste taak wat mense bereid sal wees om te help met die deur die gebruik van die vrye tyd op hul rekenaars. En hy het oor die bou van

'n sagteware platform wat baie ander wetenskaplikes sou toelaat dat soortgelyke projekte op te rig. Jy kan meer lees oor hierdie platform, genoem BOINC, en die baie verskillende soorte van vrywilliger-computing projekte ondersteun vandag by <http://boinc.berkeley.edu/>.

Daar is iets vir almal, van soek na nuwe priemgetalle (PrimeGrid) aan die simuleer van die toekoms van die aarde se klimaat (ClimatePrediction.net). Een van die projekte, MalariaControl.net betrokke navorsers van die Universiteit van Kaapstad, sowel as van universiteite in Mali en Senegal.

Die ander netjiese kenmerk van BOINC is dat dit kan mense wat 'n gemeenskaplike belang in 'n wetenskaplike onderwerp deel hul passie, en leer van mekaar. BOINC ondersteun selfs spanne - groepe van mense wat hul rekenaar krag saam te stel, in 'n virtuele wyse op die web, 'n hoër telling as hul teenstanders te kry. So BOINC is 'n bietjie soos Facebook en World of Warcraft gekombineer - deel sosiale netwerk, wat deel uitmaak online multiplayer game.

Hier is 'n gedagte: spandeer tyd soek om BOINC vir 'n projek wat jy wil deel te neem aan, of vertel vir die klas.

Jy is ook 'n rekenaar

Voordat rekenars masjiene was, was hulle mense. 'n Groot kamers vol van honderde van staat-samptenare wat gebruik word om die soort van wiskundige tabelle dat 'n laptop deesdae in 'n breukdeel van 'n sekonde kan produseer te bereken. Hulle gebruik om daardie berekeninge te moeisam te doen, met die hand. En omdat dit maklik om foute te maak, was 'n groot deel van die moeite wat betrokke is in die dubbele kontrole van die werk wat gedoen is deur ander is.

Wel, dit was 'n lang tyd gelede. Omdat elektroniese rekenars oor 50 jaar gelede na vore getree het, is daar nie nodig om groot groepe mense te vergader vervelig, herhalend wiskundige take te doen. Silicon skyfies kan hierdie probleme op te los vandag baie vinniger en meer akkuraat. Maar daar is nog 'n paar wiskundige probleme waar die menslike brein blink.

Volunteer-rekenars is 'n goeie naam vir wat BOINC nie: dit maak dit moontlik vrywilligers rekenkracht van hul rekenars en skootrekenars te dra. Maar in die afgelope jaar, het 'n nuwe tendens na vore gekom in die burger cyberscience wat is die beste beskryf word as vrywilliger denke. Hier is die rekenars is vervang deur die brein, wat verbind is via die web deur middel van 'n koppelvlak genoem oë. Want vir 'n paar ingewikkelde probleme - veral dié wat die volgende behels die erkenning van komplekse patrone of drie-dimensionele voorwerpe - die menslike brein is nog steeds 'n baie vinniger en meer akkuraat as 'n rekenaar.

Volunteer denke projekte kom in baie vorms en groottes. Byvoorbeeld, kan jy help om miljoene van beelde van verre sterrestelsels (GalaxyZoo), of fotobewerking hand-geskrewe inligting wat verband hou met die museum argief data van verskillende plantspesies (Herbaria@home) te klassifiseer. Dit is 'n moeisame werk, wat as links kenners sou neem jare of dekades te voltooi. Maar danksy die web, dit is moontlik om beelde te versprei, sodat die honderde duisende mense kan bydra tot die soektog.

Nie alleen is daar krag in getalle, is daar akkuraatheid, ook. Want deur die gebruik van 'n tegniek genaamd validation - wat nie dieselfde soort dubbele kontrole wat gebruik word gedoen deur mense wat die maak van wiskundige tabelle - is dit moontlik om prakties die gevolge van menslike foute uit te skakel. Dit is waar, selfs al is elke vrywilliger kan nogal 'n paar foute maak. So projekte soos Planet Jagters het reeds gehelp om sterrekundiges uitwys nuwe planete omkring verre sterre. Die spel FoldIt nooi mense om mee te ding in die vou proteïen molekules deur 'n eenvoudige muis-gedrewe koppelvlak. Deur die bevinding van die mees waarskynlike manier om 'n proteïen sal vou,

kan vrywilligers help met die verstaan van siektes soos Alzheimer se siekte, wat afhanklik is van hoe proteïene vou.

Volunteer denke is opwindend. Maar miskien selfs meer ambisieus is, is die nuwe idee van 'n vrywilliger sensing: jou laptop of selfs jou selfoon gebruik om data in te samel - klanke, beelde, teks wat jy intik - vanaf enige punt op die planeet, help wetenskaplikes om globale netwerke van sensors wat te skep kan optel die eerste tekens van 'n uitbraak van 'n nuwe siekte (EpiCollect), of die aanvanklike bewing wat verband hou met 'n aardbewing (QuakeCatcher.net), of die geraas vlakke in 'n nuwe lughawe (NoiseTube).

Daar is omtrent 'n miljard PC's en skootrekenaars op die planeet nie, maar reeds 5 miljard selfone. Die vinnige ontwikkeling van die rekenaar tegnologie, waar die krag van 'n tien-jaar-ou rekenaar kan maklik in 'n slimfoon verpak vandag, beteken dat die burger cyberscience het 'n blink toekoms in selfone. En dit beteken dat meer en meer van die wêreld se bevolking kan deel wees van die burger cyberscience projekte. Vandag is daar waarskynlik 'n paar miljoen deelnemers in 'n paar honderd burger cyberscience inisiatiewe. Maar daar sal binnekort sewe miljard brein op die planeet. Dit is 'n baie potensiaal burger cyberscientists.

Jy kan verken veel meer oor burger cyberscience op die web. Daar is 'n groot lys van alle soorte projekte, met kort opsommings van hul doelwitte te bereik, by <http://distributedcomputing.info/>. BBC Radio 4 'n kort reeks oor die burger wetenskap <http://www.bbc.co.uk/radio4/science/citizenscience.shtml> en jy kan inteken op 'n nuusbrief oor die nuutste tendense in hierdie gebied op <http://scienceforcitizens.net/>. Die Burger Cyberscience Centre, www.citizencyberscience.net wat geborg word deur die Suid-Afrikaanse Shuttleworth Foundation, is die bevordering van burger cyberscience in Afrika en ander ontwikkelende streke.

Blog posts

Algemene blogs

- Teachers Monthly - Education News and Resources
 - "We eat, breathe and live education! "
 - "Perhaps the most remarkable yet overlooked aspect of the South African teaching community is its enthusiastic, passionate spirit. Every day, thousands of talented, hard-working teachers gain new insight from their work and come up with brilliant, inventive and exciting ideas. Teacher's Monthly aims to bring teachers closer and help them share knowledge and resources.
 - Our aim is twofold...
 - * To keep South African teachers updated and informed.
 - * To give teachers the opportunity to express their views and cultivate their interests."
 - <http://www.teachersmonthly.com>
- Head Thoughts – Personal Reflections of a School Headmaster
 - blog by Arthur Preston

- “Arthur is currently the headmaster of a growing independent school in Worcester, in the Western Cape province of South Africa. His approach to primary education is progressive and is leading the school through an era of new development and change.”
- <http://headthoughts.co.za/>

Wiskunde blogs

- CEO: Circumspect Education Officer - Educating The Future
 - blog by Robyn Clark
 - “Mathematics teacher and inspirer.”
 - <http://clarkformaths.tumblr.com/>
- dy/dan - Be less helpful
 - blog by Dan Meyer
 - “I’m Dan Meyer. I taught high school math between 2004 and 2010 and I am currently studying at Stanford University on a doctoral fellowship. My specific interests include curriculum design (answering the question, “how we design the ideal learning experience for students?”) and teacher education (answering the questions, “how do teachers learn?” and “how do we retain more teachers?” and “how do we teach teachers to teach?”).”
 - <http://blog.mrmeyer.com>
- Without Geometry, Life is Pointless - Musings on Math, Education, Teaching, and Research
 - blog by Avery
 - “I’ve been teaching some permutation (or is that combination?) of math and science to third through twelfth graders in private and public schools for 11 years. I’m also pursuing my EdD in education and will be both teaching and conducting research in my classroom this year.”
 - <http://mathteacherorstudent.blogspot.com/>
- Overthinking my teaching - The Mathematics I Encounter in Classrooms
 - blog by Christopher Danielson
 - “I think a lot about my math teaching. Perhaps too much. This is my outlet. I hope you find it interesting and that you’ll let me know how it’s going.”
 - <http://christopherdanielson.wordpress.com>
- A Recursive Process - Math Teacher Seeking Patterns
 - blog by Dan
 - “I am a High School math teacher in upstate NY. I currently teach Geometry, Computer Programming (Alice and Java), and two half year courses: Applied and Consumer Math. This year brings a new 21st century classroom (still not entirely sure what that entails) and a change over to standards based grades (sbg).”
 - <http://dandersod.wordpress.com>
- Think Thank Think – Dealing with the Fear of Being a Boring Teacher
 - blog by Shawn Cornally

- “I am Mr. Cornally. I desperately want to be a good teacher. I teach Physics, Calculus, Programming, Geology, and Bioethics. Warning: I have problem with using colons. I proof read, albeit poorly.”
- <http://101studiostream.com/wordpress/>

Oorsig

Kurrikulum Oorsig

Voor 1994 het daar 'n aantal verskillende onderwysdepartemente en kurrikula bestaan volgens die skeiding wat so duidelik was tydens die apartheid era. As 'n gevolg het die kurrikulum self een van die politiese ikone van vryheid of onderdrukking geword. Sedertdien het die regering en politieke leiers probeer om een kurrikulum te ontwikkel, wat die nasionale agenda van demokratiese vryheid en gelykheid ondesteun, deur die kennis, vaardighede en waardes wat ons leerders moet leer and toepas op die voorgrond te stel, sodat hulle op 'n betekenisvolle manier kan deelneem in die samelewing as burgers van 'n vry land. Die Nasionale Kurrikulumverklaring (NKV) Graad R-12 (DBE, 2012) dien dus volgende doelwitte:

- om leerders toe te rus met die kennis, vaardighede end waardes benodig vir selfverwesenliking en betekenisvolle deelname in die samelewing as burgers van 'n vry land, ongeag hulle sosio-ekonomiese agtergrond, ras, geslag, fisiese of intellektuele vermoë;
- om toegang to hoër onderrig te verskaf;
- om die oorgang van leerders vanaf onderwysinstellings na die werkplek te fasiliteer; en
- om werkgewers met 'n voldoende profiel van leerdersbevoegdhede te verskaf.

Alhoewel dit verhef is tot die status van 'n politiese ikoon, bly die kurrikulum 'n instrument. Die vaardighede van 'n onderwyser word benodig om hierdie instrument te interpreteer en operasionaliseer in die klaskamer. Die kurrikulum self kan nie die doelwitte hierbo gelys bereik sonder dat die gemeenskap van kurrikulumspesialiste, ontwikkelaars van onderwysmateriaal, onderwysers en assessore die proses, om die voorgenome kurrikulum die geïmplementeerde kurrikulum te maak, ondersteun en daartoe bydra nie. 'n Kurrikulum kan slaag of misluk, afhangende van die implementering en ongeag die voorgenome beginsels of potensiaal op papier daarvan. Daarom is dit belangrik dat belanghebbendes van die kurrikulum vertrou is en ooreenstem met die volgende beginsels waarop die NKV gebaseer is:

Beginsel	Implementering
Sosiale Transformasie	Die regstelling van wanbalanse van die verlede. Die verskaffing van gelyke geleenthede vir almal.
Aktiewe en Kritiese Leer	Aanmoediging van 'n aktiewe en kritiese benadering tot leer. Vermyding van oormatige onkritiese memorisering van gegewe waarhede.
Diepgaande Kennis en Vaardighede	Leerders behaal minimum standarde van kennis en vaardighede, soos bepaal vir elke graad in elke vak.
Vordering	Inhoud en konteks toon progressie van eenvoudig na kompleks.
Sosiale en Omgewingsgeregtigheid en Menseregte	Praktyke soos in die Grondwet omskryf is, verweef in die onderrig en leer van elk van die vakke.
Waardering vir Inheemse Kennissisteme	Erken die ryk geskiedenis en erfenis van hierdie land.
Geloofwaardigheid, Gehalte en Doeltreffendheid	Verskaffing van onderrig wat wêreldwyd vergelykbaar is i.t.v. kwaliteit.

Hierdie gids is bedoel om waarde en insig toe te voeg tot die bestaande Nasionale Kurrikulum vir Graad 10 Wiskunde, in lyn met die doelwitte en beginsels daarvan. Daar word gehoop dat dit u as die opvoeder sal help om die voorgenome kurrikulum te optimeer en implementeer.

Kurrikulumvereistes en doelwitte

Die belangrikste doelwitte van die kurrikulum hou verband met die leerders wat uit ons opvoedkundestelsel kom. Opvoeders is die belangrikste rolspelers in die uitvoering van die voorgenome kurrikulum. Die kwaliteit van die leerder wat deur hierdie stelsel beweeg, sal egter die bewys wees dat die kurrikulum soos wat dit bedoel en geïmplementeer is, ook sy doelwitte bereik het. Hierdie doelwitte en beginsels beoog om leerders te produseer wat in staat is:

- om probleme te identifiseer en op te los en om besluite te neem deur kritiese en kreatiewe denke;
- om doeltreffend te werk as individue en met ander as lede van 'n span;
- om hulself en hul aktiwiteite verantwoordelik en doeltreffend te organiseer en bestuur;
- om inligting te versamel, te analiseer, te organiseer en krities te evalueer;
- om effektief te kommunikeer deur gebruik te maak van visuele, simboliese en/of taalvaardighede in verskillende vorme;
- om wetenskap en tegnologie doeltreffend en krities te gebruik met verantwoordelikheid teenoor die omgewing en die gesondheid van ander;
- om begrip van die wêreld as 'n stel verwante stelsels te toon deur te herken dat die kontekste van probleme nie in isolasie bestaan nie.

Die bogenoemde punte kan opgesom word as 'n onafhanklike leerder wat krities en analities kan dink, in staat is om effektief met lede van 'n span te werk, en probleme kan identifiseer en oplos deur middel van effektiewe besluitneming. Dit is ook die uitkoms waarna binne opvoedkundige navorsing verwys word as die "hervormde" benadering eerder as die "tradisionele" benadering waaraan baie opvoeders meer gewoond is. Tradisionele praktyke het hul rol en kan nie heeltemal ten gunste van hervormde praktyke daargelaat word nie. Maar, ten einde meer onafhanklike en wiskundige denkers te produseer, moet die hervorming ideologie deur opvoeders ingeneem word in hul optrede as onderwysers. Hier is 'n tabel wat kan help om u dominante instruksionele praktyk te identifiseer en u probeer help om dit aan te pas (indien nodig), om meer gebalanseerd en in lyn met die hervorming benadering, soos voorgestel deur die NKV, te wees.

	Tradisionele Versus Hervormde Praktyke
Waardes	Tradisioneel — fokus op onderrigmateriaal, korrektheid van leerders se antwoorde en wiskundige geldigheid van metodes. Hervorm — patrone vind, konsepte verbind, wiskundig kommunikeer en probleemoplossing.
Onderrigmetodes	Tradisioneel — verklarend, oordrag van inligting, baie oefen en herhaling, stap vir stap bemeestering van algoritmes. Hervorm — Geleide ontdekkingsmetodes, eksplorاسie, modelering. Hoë vlak van redenasie is sentraal.
Groepering van Leerders	Tradisioneel — oorheersend gelyksoortige groepering. Hervorm — oorheersend gemengde vermoëns.

Die vak wiskunde verskaf uiter aard ruim geleentheid om te voldoen aan die hervormde doelwitte. Die definisie van wiskunde moet verstaan en omhels moet word deur die opvoeders betrokke by die onderrig en die leer van die vak. In die navorsing is dit goed gedokumenteerd dat ons opvatting oor wat wiskunde is, 'n invloed het op ons benadering tot die onderrig en leer van die vak. Drie sienings van wiskunde word hier aangebied. Die instrumentalistiese siening van wiskunde aanvaar die standpunt dat wiskunde 'n versameling feite, reëls en vaardighede is wat gebruik word as 'n middel vir 'n doelwit, sonder dat daar noodwendig 'n verband is tussen hierdie komponente. Die Platonistiese siening van wiskunde is dat die vak 'n statiese, maar verenigde liggaam van sekere kennis is, waarbinne wiskunde ontdek word eerder as om geskep te word. Die probleemoplossing siening van wiskunde is dat dit 'n dinamiese, voortdurend ontwikkelende veld van menslike skepping en uitvinding is wat op sigself 'n kulturele produk is. Wiskunde word dus beskou as 'n proses van ondersoek, eerder as 'n voltooide produk. Die resultate bly voortdurend oop vir hersiening. Een voorgestel is dat 'n hiërargiese orde bestaan binne hierdie drie aansigte, met die instrumentalistiese siening op die laagste vlak en die probleemoplossing siening op die hoogste vlak.

Volgens die NKV:

Wiskunde is die studie van hoeveelheid, struktuur, ruimte en verandering. Wiskundiges soek patrone, formuleer nuwe veronderstellings en vestig aksiomatiese stelsels deur die streng deduktiewe afleiding vanaf toepaslik gekose aksiomas en definisies. Wiskunde is 'n menslike aktiwiteit wat deur alle kulture beoefen is, vir duisende jare reeds. Wiskundige probleemoplossing stel ons in staat om die wêreld rondom ons (fisies, sosiaal en ekonomies) te verstaan en, belangrikste van alles, om te leer om kreatief

te dink. Dit stem goed ooreen met die probleemoplossing siening van wiskunde en mag dalk sommige van ons instrumentalistiese of Platonistiese sienings, as 'n statiese versameling van kennis, feite, reëls en vaardighede wat geleer en toegepas moet word, uitdaag. Die NKV probeer om so 'n benadering te ontmoedig en moedig wiskunde-onderwysers aan om op 'n dinamiese en kreatiewe manier hulle leerders as wiskundiges te betrek by 'n proses van studie, begrip, redenering, probleemoplossing en kommunikasie. Hieronder is 'n lys wat u kan help om u lesse aktief te ontwerp in 'n poging om die NKV definisie van wiskunde te omhels en om nader te beweeg aan 'n probleemoplossing konsepsie van die onderwerp. Die aanvaarding van so 'n benadering tot die onderrig en leer van wiskunde sal op sy beurt bydra tot die implementering en realisering van die voorgenome kurrikulum, in terme van die kwaliteit van die leerders wat uit die onderwysstelsel kom.

Aktiwiteit	Voorbeeld
Leerders neem deel aan die oplossing van kontekstuele probleme wat verband hou met hulle lewens en wat vereis dat hulle 'n probleem interpreteer en dan 'n geskikte wiskundige oplossing te vind.	Leerders word gevra om uit te werk watter busdiens die goedkoopste is, gegee die tariewe en die afstand wat hulle wil reis.
Leerders raak betrokke by die oplossing van probleme van 'n suiwer wiskundige aard, wat hoër orde denke en die toepassing van kennis (nie-standaard probleme) benodig.	Leerders word gevra om 'n grafiek te teken. Hulle het nog nie 'n spesifieke tekentegniek (byvoorbeeld vir 'n parabool) geleer nie, maar het geleer om die tabelmetode te gebruik om reguit lyne te teken.
Leerders kry geleentheid om oor betekenis te redeneer.	Leerders bespreek hul begrip van konsepte en strategieë vir die oplossing van probleme met mekaar en met die onderwyser.
Leerders word geleer end gevra om situasies op verskeie ekwivalente maniere te verteenwoordig (wiskundige modellering).	Leerders verteenwoordig dieselfde data met behulp van 'n grafiek, 'n tabel en 'n formule om die data voor te stel.
Leerders doen individueel wiskundige ondersoeke in die klas, gelei deur die onderwyser waar nodig.	Elke leerder kry 'n wiskundige probleem (byvoorbeeld om die aantal priemgetalle minder as 50 te vind) wat ondersoek moet word en die oplossing neergeskryf moet word. Leerders werk onafhanklik.
Leerders werk saam as 'n groep/span om ondersoek in te stel of 'n wiskundige probleem op te los.	'n Groep word opdrag gegee om saam te werk aan 'n probleem wat vereis dat hulle patrone in data ondersoek, om veronderstellings te maak en 'n formule vir die patroon te vind.
Leerders doen oefeninge om hulle kennis van konsepte te konsolideer en verskeie vaardighede te bemeester.	Voltooiing van 'n oefening wat roetine prosedures benodig.
Leerders kry geleenthede om die wisselwerking tussen verskillende aspekte van wiskunde te sien en om te sien hoe die verskillende uitkomstewant is.	Terwyl leerders deur meetkunde probleme werk, word hulle aangemoedig om gebruik te maak van algebra.
Leerders word gevra om probleme vir hulle onderwyser en klasmaats op te stel.	Leerders word gevra 'n algebraïese woordsom op te stel (waarvan hulle ook die oplossing ken), vir die persoon wat langs hulle sit om op te los.

Oorsig van die onderwerpe

Oorsig van onderwerpe en hulle relevansie.

1. Funksies — lineêr, kwadratiese, eksponensiële, rasioneel	Relevansie
Verwantskappe tussen veranderlikes in terme van die grafiese, verbale en simboliese voorstellings van funksies (tabelle, grafieke, woorde en formules). Grafieke en veralgemeningsgevolge van parameters: vertikale verskuiwings en skalering en refleksies om die x-as. Probleemoplossing en grafiekwerk met betrekking tot voorgeskrewe funksies.	Funksies vorm 'n sentrale deel van leerders se wiskundige begrip en redenasie-prosesse in algebra. Dit is ook 'n uitstekende geleentheid vir kontekstuele wiskundige modeleringvrae.

2. Getalpatrone, rye en reekse	Relevansie
Getalpatrone met konstante verskil.	Baie wiskunde wentel rondom die identifisering van patrone.

3. Finansies, groei en krimping	Relevansie
Gebruik eenvoudige en saamgestelde groei-formules. Implikasies van die veranderende wisselkoerse.	Die wiskunde van finansies is baie relevant vir daaglikse en langtermyn finansiële besluite wat leerders sal moet maak vir beleggings, lenings, spaar, begrip van wisselkoerse en die invloed daarvan wêreldwyd.

4. Algebra	Relevansie
Verstaan dat reële getalle kan word irrasionele of rasionele. Vereenvoudig uitdrukkings deur gebruik te maak van die wette van eksponente vir rasionale eksponente. Identifiseer en die omskep die verskillende vorme van rasionale getalle. Werk met eenvoudige wortels wat nie rationeel is nie. Werk met die wette van heeltallige eksponente. Bepal tussen watter twee heelgetalle 'n eenvoudige wortelvorm lê. Rond reële getal gepas af. Manipuleer en vereenvoudig algebraïese uitdrukkings (insluitend vermenigvuldiging en faktorisering). Los lineêre, kwadratiese, letterlike en eksponensiële vergelykings op. Los lineêre ongelykhede in een en twee veranderlikes algebraïes en grafies op.	Algebra verskaf die grondslag vir wiskunde leerders om te beweeg van numeriese berekeninge na veralgemeende operasies, vereenvoudiging van uitdrukkings, oplos van vergelykings en gebruik van grafieke en ongelykhede vir die oplossing van kontekstuele probleme.

5. Differensiaalrekening	Relevansie
Ondersoek gemiddelde koers van verandering tussen twee onafhanklike waardes van 'n funksie.	Die sentrale aspek van die tempo van verandering vir differensiaalrekening is as 'n basis vir verdere begrip van grense, gradiënte en berekeninge en formules wat nodig is vir werk in die ingenieurswese-velde, bv.. die ontwerp van paaie, brûe ens.

6. Waarskynlikheid	Relevansie
Vergelyk relatiewe frekwensie en teoretiese waarskynlikheid Gebruik Venn diagramme om waarskynlikheid probleme op te los. Uitsluitlike en komplementêre gebeure. Identiteite vir enige twee gebeure A en B.	Hierdie onderwerp is nuttig vir die ontwikkeling van goeie logiese redenasievermoë en vir die opvoeding van leerders in terme van werklike lewenskwessies soos dobbelary en die slaggate daarvan.

7. Euklidiese Meetkunde en Meting	Relevansie
Ondersoek, vorm en probeer om veronderstellings oor die eenskappe van driehoeke, vierhoeke en ander veelhoeke te bewys. Weerlê valse veronderstellings deur die gebruik van teenvoorbeelde. Ondersoek alternatiewe definisies van verskillende veelhoeke. Los probleme op met betrekking tot die oppervlakte en volume van soliede voorwerpe en kombinasies daarvan.	Die denkprosesse en wiskundige vaardighede met betrekking tot die bewys van veronderstellings en die identifisering van valse veronderstellings is meer relevant as om die inhoud te studeer. Die oppervlakte en volume in praktiese kontekste soos die ontwerp van kombuise, die teël en verf van kamers, die ontwerp van verpakking, ens. is relevant tot die huidige en toekomstige lewens van leerdeers.

8. Trigonometrie	Relevansie
Definisies van trigonometriese funksies. Lei waardes af vir spesiale hoeke. Neem kennis van die name vir inverse funksies. Los probleme op in 2 dimensies. Brei definisies van basiese trigonometriese funksies uit na al vier kwadrante en ken grafieke van hierdie funksies. Ondersoek en weet wat die gevolge van a en q op die grafieke van basiese trigonometriese funksies is.	Trigonometrie het verskeie gebruike in die samelewing, bv. in navigasie, musiek, geografie en die ontwerp en konstruksie van geboue.

9. Analitiese meetkunde	Relevansie
Stel meetkundige figure op 'n Cartesiese koördinaatstelsel voor. Vir enige twee punte, lei af en pas toe die formule vir die berekening van afstand en helling van 'n lynsegment en die koördinate van die middelpunt.	Hierdie afdeling verskaf 'n verdere toepassing vir leerders se algebraïese en trigonometriese interaksie met die Cartesiese vlak. Kunstenaars en die ontwerp en uitleg industrieë maak dikwels gebruik van die inhoud en denkprosesse van hierdie wiskundige onderwerp.

10. Statistiek	Relevansie
Versamel, organiseer en interpreteer enkelveranderlike numeriese data om gemiddeld, mediaan, modus, persentiele, kwartiele, desiele, interkwartiel- en semi-interkwartielvariasiewydte te bepaal. Identifiseer moontlike bronne van vooroordeel en foute in metings.	Mense word daaglik gekonfronteer met die interpretasie van data wat deur die media verskaf word. Dikwels word hierdie data bevooroordeeld of wanvoorgestel binne 'n sekere konteks. In enige soort navorsing is die insameling en hantering van data kernprosesse. Hierdie onderwerp help ook leerders op om meer sosiaal en polities opgevoed te wees ten opsigte van die media.

Wiskunde onderwysers moet ook verseker dat die volgende belangrike spesifieke doelwitte en algemene beginsels toegepas word in wiskunde-aktiwiteite in alle grade:

- Sakrekenaars mag slegs gebruik word om die standaard numeriese berekeninge uit te voer en berekeninge wat met die hand gedoen is, te kontroleer.
- Werklike probleme geïntegreer word in alle afdelings, om wiskundige modellering te behou as 'n belangrike fokuspunt van die kurrikulum.
- Ondersoeke gee leerders die geleentheid om hul vermoë om meer metodies te wees, om te kan veralgemeen, en om veronderstellings te kan ontwikkel en regverdig en/of bewys.
- Gepaste benaderings- en afrondingsvaardighede moet geleer word en voortdurend aangemoedig word in aktiwiteite.
- Die geskiedenis van wiskunde moet ingewerk word in projekte en take, waar moontlik, om die menslike aspek en ontwikkelende aard van wiskunde te illustreer.
- Kontekstuele probleme moet kwessies met betrekking tot gesondheid, maatskaplike, ekonomiese, kulturele, wetenskaplike, politieke en omgewingskwessies insluit, waar moontlik.
- Konseptuele begrip van “wanneer” en “hoekom” moet ook deel vorm van die tipes probleme.
- Onderrig vir gemengde vermoëns vereis dat opvoeders in staat is om leerders uit te daag en remediërende ondersteuning aan te bied, waar nodig.
- Wanpersepsies wat deur assessering blootgestel word, moet hanteer en reggestel word met behulp van vroeë ontwerp deur opvoeders.
- Probleemoplossing en kognitiewe ontwikkeling moet sentraal wees tot alle wiskunde onderrig en leerwerk, sodat leerders hulle kennis doeltreffend kan toepas.

Toekenning van onderrigtyd

Tydstoekenning vir Wiskunde per week: 4 uur en 30 minute, bv. ses 45-minuut periodes per week.

Kwartaal	Onderwerp	Aantal weeks
Kwartaal 1	Algebraïese uitdrukkings	3
	EkspONENTE	2
	Getalpatrone	1
	Vergelykings en ongelykhede	2
	Trigonometrie	3
Kwartaal 2	Funksies	4
	Trigonometriese funksies	1
	Euklidiese meetkunde	3
	Half-jaar eksamen	3
Kwartaal 3	Analitiese meetkunde	2
	Finansies en groei	2
	Statistiek	2
	Trigonometrie	2
	Euklidiese meetkunde	1
	Meting	1
Kwartaal 4	Waarskynlikheid	2
	Hersiening	4
	Eksamen	3

Sien bladsy 18 van die Kurrikulum- en Assesseringsbeleidsraamwerk vir die volgordebepaling en tempo van onderwerpe.

Assessering

“Opvoeder assessering is deel van die alledaagse onderrig en leerwerk in die klaskamer. Opvoeders hou besprekings met leerders, lei hulle in hul werk, vra en beantwoord vrae, neem waar, help, moedig aan en daag uit. Daarbenewens merk en hersien hulle geskrewe en ander vorme van werk. Deur middel van hierdie aktiwiteite is hulle voortdurend besig om meer uit te vind oor hulle leerders se vermoëns en prestasies. Hierdie kennis lig dan planne in vir toekomstige werk. Opvoeder assessering behels hierdie deurlopende proses. Dit moet nie gesien word as ’n afsonderlike aktiwiteit wat noodwendig die gebruik van ekstra take of toetse vereis nie.”

Soos die aanhaling hierbo suggereer, behoort assessering opgeneem te word as deel van die klaskamerpraktik, eerder as ’n afsonderlike aktiwiteit. Navorsing gedurende die afgelope tien jaar dui aan dat leerders ’n gevoel kry van wat hulle weet en nie weet nie, van wat hulle hieromtrent kan doen en hoe hulle hieroor voel, vanaf gereelde klaskamerassessering en onderwyser terugvoer. Die onderwyser se persepsies van en benadering tot assessering (beide formele en informele assessering) kan ’n invloed hê op die klaskamer kultuur, wat geskep word met betrekking tot die leerders se verwagtinge van en prestasie in assesseringstake. Literatuur oor klaskamerassessering onderskei tussen twee verskillende doelwitte van assessering: assessering van leer en assessering vir leer.

Assessering van leer is geneig om 'n meer formele assessering te wees en assesser hoeveel leerders geleer het, of op 'n bepaalde punt in die jaarlikse onderrigplan verstaan. Die NKV bied omvattende riglyne oor die soorte en hoeveelheid van formele assessering wat moet plaasvind binne die onderrigjaar, om die skoolgebaseerde assesseringspunt saam te stel. Die skoolgebaseerde assesseringspunt dra 25% by tot die finale persentasie van 'n leerder se promosiepunt; die einde van die jaar eksamen bepaal die ander 75% van die jaarlikse promosiepunt. Daar word van leerders verwag om 7 formele assesseringstake vir hul skoolgebaseerde assesseringspunt te hê. Die aantal take en hul gewig in die graad 10 wiskunde kurrikulum is hieronder opgesom:

		Take	Gewigstoekenning (%)
Skool-gebaseerde Assessering	Kwartaal 1	Toets Projek/Ondersoek	10 20
	Kwartaal 2	Opdrag/Toets Eksamen	10 30
	Kwartaal 3	Toets Toets	10 10
	Kwartaal 4	Toets	10
Skool-gebaseerde Assesseringspunt			100
Skool-gebaseerde Assesseringspunt (as 'n % van Vorderingspunt)			25 %
Eindeksamen			75 %
Vorderingspunt			100 %

Die volgende is 'n kort verduideliking van elk van die assesseringstake ingesluit in die assesseringsprogram hierbo.

Toetse

Alle wiskunde-opvoeders is vertrouwd met hierdie vorm van formele assessering. Die toetse sluit 'n verskeidenheid van items/vrae in wat die onderwerpe dek wat reeds voor die toets aangebied is. Die nuwe NKV bepaal ook dat wiskundetoetse vrae wat betrekking het op die volgende vier tipes kognitiewe vlakke insluit:

Kognitiewe Vlakke	Beskrywing	Gewigstoekenning (%)
Kennis	Beramings- en toepaslike afronding van getalle. Bewyse van voorgeskrewe stellings. Die aflei van formules. Direkte herroeping. Identifisering en die direkte gebruik van formules op die inligtingsblad (geen verandering van die onderwerp). Gebruik van wiskundige feite. Toepaslike gebruik van wiskundige woordeskat.	20
Roetine Prosedures	Voer bekende prosedures uit. Eenvoudige toepassings en berekeninge. Afleiding vanaf die gegewe inligting. Identifikasie en die gebruik (insluitend die verandering van die onderwerp) van korrekte formules. Vrae oor die algemeen soortgelyk aan dié wat in die klas behandel is.	45
Komplekse Prosedures	Probleme behels komplekse berekenings en/of hoër redenasie. Daar is dikwels nie 'n duidelike pad na die oplossing. Probleme hoef nie gebaseer te wees op 'n werklike konteks nie. Kan die vorming van beduidende verbindings tussen verskillende voorstellings behels. Vereis konseptuele begrip.	25
Probleemoplossing	Voorheen ongesiene, nie-roetine probleme (wat nie noodwendig moeilik is nie). Hoër orde begrip en prosesse is dikwels betrokke. Kan die vermoë om die probleem in sy samestellende dele op te breek, vereis.	10

Die uiteensetting van die toetse oor die vier kwartale van die NKV assesseringsprogram word as volg opgesom:

Kwartaal 1: Een toets van ten minste 50 punte en een uur, of twee/drie toetse van ten minste 40 minute elk.

Kwartaal 2: Óf een toets (van ten minste 50 punte) óf 'n werkstuk.

Kwartaal 3: Twee toetse, elk van ten minste 50 punte en een uur.

Kwartaal 4: Een toets van ten minste 50 punte.

Projekte/Ondersoeke

Ondersoeke en projekte bestaan uit oop vrae wat denkprosesse inisiëer en ontwikkel. Die aanleer en ontwikkeling van probleem-vaardighede is 'n noodsaaklike deel van ondersoeke en projekte. Hierdie take bied leerders die geleentheid om ondersoek in te stel, inligting te versamel, resultate te tabuleer, veronderstellings te maak, en hierdie veronderstellings te regverdig of bewys. Voorbeelde van ondersoeke en projekte en moontlike assesseringskale word aangegee in die volgende afdeling oor assessering ondersteuning. Die NKV assesseringsprogram dui aan dat slegs een projek of ondersoek (van ten minste 50 punte) per jaar ingesluit moet word. Alhoewel die projek/ondersoek in die eerste kwartaal aangegee word van die assesseringsskedule, kan dit ook in die tweede kwartaal gedoen word.

Opdragte

Die NKV sluit die volgende take in as goeie voorbeelde van opdragte:

- Oopboe toets
- Vertalingopdrag
- Foute identifiseer en verbeter
- Korter ondersoek
- Joernaalinskrywing
- Breinkaart (ook bekend as 'n metacog)
- Olimpiade (eerste rondte)
- Wiskunde-handleiding oor 'n hele onderwerp
- Wiskunde tutoriaal op meer komplekse/probleemoplossings vrae

Die NKV assesseringsprogram vereis dat 'n opdrag(van ten minste 50 punte) in die tweede kwartaal gegee word. Dit kan 'n kombinasie wees van 'n paar van die voorbeelde hierbo. Meer inligting oor hierdie voorgestelde voorbeelde van opdragte en moontlike assesseringsrubrieke word in die volgende afdeling oor assesseringsondersteuning gegee.

Eksamens

Opvoeders is goed vertrouwd met hierdie summatiëwe vorm van assessering wat gewoonlik tweekeer per jaar gedoen word: die middel-van-die-jaar eksamens en einde-van-jaar eksamens. Dit is soortgelyk aan toetse, maar dek 'n groter verskeidenheid van onderwerpe wat voltooi is voor elke eksamen. Die NKV bepaal dat elke eksamen die vier kognitiëwe vlakke sal dek volgens hul aanbevole gewigte soos saamgevat in die afdeling oor toetse. Die volgende tabel gee 'n opsomming van die vereistes en inligting van die NKV vir die twee eksamens.

Eksamen	Punte	Uiteensetting	Inhoud en puntverspreiding
Middel-van-die-jaar eksamen	100 50 + 50	Een vraestel: 2 uur of Twee vraestelle: 1 uur elk	Onderwerpe voltooi
Einde-van-die-jaar eksamen	100 +	Vraestel 1: 2 ure	Getalpatrone (± 10) Algebraïese uitdrukkings, vergelykings en ongelykhede (± 25) Funksies (± 35) Eksponente (± 10) Finansies (± 10) Waarskynlikheid (± 10)
	100	Vraestel 2: 2 ure	Trigonometrie (± 45) Analitiese meetkunde (± 15) Euklidiese meetkunde en meting (± 25) Statistiek (± 15)

In die jaarlikse opsommende onderrigplan van die NKV in Wiskunde vir Graad 10, verskaf die pasaan-
duider afdeling 'n gedetailleerde model van die voorgestelde onderwerpe wat gedek moet word in
elke week van elke kwartaal en die gepaardgaande formele assessering.

Assessering **vir** leer is geneig om meer informeel te wees en fokus op die toepassing van assessering in
die loop van die daaglikse klaskameraktiwiteite. Dit sluit in:

- Nasien van huiswerk
- Basislynassesserings
- Diagnostiese assessering
- Groepwerk
- Klasbesprekings
- Mondelinge aanbiedings
- Self-assessering
- Eweknie-assessering

Hierdie aktiwiteite word uitgebrei in die volgende afdeling oor assesseringsondersteuning en voorgestelde
assesseringskale word voorsien. Waar formele assessering geneig is om die leerder te beperk tot
skriftelike assesseringstake, is die informele assessering nodig is om leerders se vordering in verbale
wiskundige redenasie- en kommunikasievaardighede te evalueer en aan te moedig. Dit bied ook 'n
minder formele assesseringsomgewing wat leerders toelaat om hulleself openlik en eerlik te assesser,
om verantwoordelikheid te neem vir hul eie leer, sonder die swaar las van die prestasie (of punte)
komponent. Die assessering-vir-leer aktiwiteite moet ten minste een keer 'n week ingesluit word in
die klaskamer-aktiwiteite (as deel van 'n les) om te verseker dat die opvoeder in staat is om voort-
durend die leerders se begrip van die onderwerpe wat gedek is en hulle doeltreffendheid te evalueer.
Dit bemagtig ook die opvoeder om enige moontlike tekortkominge in sy of haar eie onderrig van die
onderwerpe te identifiseer.

Assessering ondersteuning

'n Verskeidenheid van verduidelikings, voorbeelde en voorgestelde assesseringskale vir die assessering van leer (formele vorme van assessering) en die assessering vir leer (informele vorme van assessering), wat in die vorige afdeling genoem is, word in hierdie afdeling uiteengesit.

Basislynassessering

Basislyn- of grondlynassessering is 'n metode vir die vasstelling van:

- die voorkennis waaroor 'n leerder beskik
- 'n leerder se vlak van kennis oor 'n spesifieke leerarea
- die vaardigheids- en toepassingsvlak wat 'n leerder toon
- 'n leerder se vlak van begrip van die verskillende leerareas

Dit is nuttig vir 'n opvoeder om te weet wat 'n leerder se individuele vertrekpunt is, ten einde hom/haar te help na 'n meer gevorderde vlak en om sodoende vordering maak. Dit help ook voorkom dat groot "gapings" bestaan in leerders se kennis soos wat hulle beweeg deur die onderwysstelsel. Uitkomsgebaseerde onderwys is 'n meer leerder-gesentreerde benadering as waaraan ons in Suid-Afrika gewoond is; dus moet die klem nou verskuif na die vlak van elke individuele leerder, eerder as dié van die hele klas.

Die basislynassessering dien ook as 'n maatstaf om leerders in staat te stel om meer verantwoordelikheid vir hulle eie leer te neem en hulle eie vordering te monitor. In die tradisionele assesseringstelsel daal die swakker leerders dikwels van 'n gemiddeld van 40% in die eerste kwartaal tot 'n gemiddeld van 30% in die vierde kwartaal as gevolg van 'n toename in die werkslading. Hulle toon dus geen duidelike vordering nie. Basislynassessering gee inligting oor die vlakke wat verbeter kan word en soos die leerder vorder deur 'n afdeling van die werk, kan aangetoon word of die leerder meer kennis, begrip en vaardigheid in daardie gebied verwerf.

Diagnostiese assessering

Dit word gebruik om uit te vind of enige spesifieke probleme bestaan ten opsigte van 'n afdeling van die werk ten einde die leerder te voorsien van toepaslike addisionele hulp en leiding. Die assessering help die opvoeder en die leerder om probleemareas, misverstande, wanopvattinge en foutiewe gebruik en interpretasie van notasie te identifiseer.

'n Paar punte om in gedagte te hou:

- Probeer om nie te veel konsepte te toets binne 'n enkele diagnostiese assessering nie.
- Wees selektief in die tipe vrae wat jy kies.
- Diagnostiese assesserings moet met 'n sekere struktuur in gedagte ontwerp word. As 'n opvoeder moet jy besluit presies watter uitkomst jy wil assesseer en die inhoud van die assessering dien ooreenkomstig struktureer.

- Die beoordeling is anders gemerk ander toetse wat die punt is nie die fokus nie, maar eerder die tipe foute wat die leerder gemaak het.

Die beoordeling word anders gemerk as ander toetse want die punt is nie die fokus nie, maar eerder die tipe foute wat die leerder gemaak het. 0: dui aan dat die leerder nie die konsep onder die knie het nie en dat daar 'n fundamentele wiskundige probleem bestaan.

1: dui aan dat die leerder 'n idee het van die inhoud, maar nie ware begrip van die inhoud of die notasie toon nie.

2: dui op getuigenis van 'n mate van begrip deur die leerder, maar verdere konsolidasie is steeds 'n vereiste.

3: dui op 'n duidelike bewys dat die leerder die konsep verstaan en die notasie korrek kan gebruik.

Sakrekenaar werkblad: assessering van diagnostiese vaardighede

1. Bereken:

(a) $242 + 63 =$ _____

(b) $2 - 36 \times (114 + 25) =$ _____

(c) $\sqrt{144 + 25} =$ _____

(d) $\sqrt[4]{729} =$ _____

(e) $-312 + 6 + 879 - 321 + 18\,901 =$ _____

2. Bereken:

(a) $\frac{2}{7} + \frac{1}{3} =$ _____

(b) $2\frac{1}{5} - \frac{2}{9} =$ _____

(c) $-2\frac{5}{6} + \frac{3}{8} =$ _____

(d) $4 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} =$ _____

(e) $\left(\frac{9}{10} - \frac{8}{9}\right) \div \frac{3}{5} =$ _____

(f) $2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) =$ _____

(g) $\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4}{16}} =$ _____

Self-assessering rubriek:

Naam: _____

Vraag	Antwoord	✓	X	Indien X, volgorde neer waarin die sleutels gedruk is
1a)				
1b)				
1c)				
1d)				
1e)				
Subtotaal				
2a)				
2b)				
2c)				
2d)				
2e)				
2f)				
2g)				
Subtotaal				
Totaal				

Opvoeder-assessering rubriek:

Tipe Vaardigheid	Bemeester	Benodig oefening	Probleem
Verhoging na 'n mag			
Vind 'n wortel			
Berekeninge met breuke			
Hakies en volgorde van berekeninge			
Skattings en hoofreken-kontrole			

Riglyne vir assessering van sakrekenaarvaardighede:

Tipe Vaardigheid	Onderafdeling	Vrae
Verhoging tot 'n mag	Vierkante en derdemagte Hoër orde magte	1a, 2f 1b
Vind 'n wortel	Vierkants en derdemagswortels Hoër order wortels	1c, 2g 1d
Berekeninge met breuke	Basiese erekeninge Gemengde getalle Negatiewe getalle Kwadreer breuke Vierkantswortel van breuke	2a, 2d 2b, 2c 1e, 2c 2f 2g
Hakies en volgeorde van berekininge	Korrekte gebruik van hakies of volgorde van berekeninge	1b, 1c, 2e, 2f, 2g
Skattings en hoofrekenkontrole	Algeheel	Almal

Voorgestelde riglyn vir die toekenning van algehele vlakke

Vlak 1

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Die leerder toon nie voldoende hoofreken skatting en -kontrole vaardighede nie.

Vlak 2

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants-en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder toon 'n mate van hoofreken skatting en -kontrole tegnieke.

Vlak 3

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen op die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants-en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is ook in staat om hoër-orde magte en wortels te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder werk korrek met negatiewe getalle.
- Leerder is in staat om hakies te gebruik in sekere berekeninge, maar verstaan nog nie ten volle die volgorde van bewerkings wat die sakrekenaar geprogrammeer is om uit te voer nie, vandaar die behoefte aan hakies.

- Leerder is in staat om moontlike foute en probleme in hul berekeninge te identifiseer, maar het hulp nodig om die probleem op te los.

Vlak 4

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen op die sakrekenaar.
- leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants-en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is ook in staat om hoër-orde-magte en wortels te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder werk korrek met negatiewe getalle.
- Leerder is in staat om korrek te werk met hakies en om die noodsaaklikheid en die gebruik van hakies en die "=" sleutel" in berekeninge reg te hanteer volgens die aard van 'n wetenskaplike sakrekenaar.
- Leerder is in staat om moontlike foute en probleme in hul berekeninge te identifiseer en om oplossings hiervoor te vind ten einde by 'n "meer geloofwaardige" antwoord uit te kom.

Ander kort diagnostiese toetse

Dit is kort toetse wat klein hoeveelhede herroeping en toepassing van kennis op 'n dag-tot-dag basis assessee. Sulke toetse kan vrae oor een of 'n kombinasie van die volgende insluit:

- Definisies
- Stellings
- Meetkunde probleme
- Formules
- Toepassings
- Gekombineerde vrae

Hier is 'n seleksie van modelvrae wat op Graad 10-vlak gebruik kan word as kort diagnostiese toetse. Hulle kan gemerk word volgens 'n memorandum opgestel deur die opvoeder. **Meetkunde**

1. Punte $A(-5; -3)$, $B(-1; 2)$ en $C(9; -6)$ is die hoekpunte van $\triangle ABC$.

(a) Bereken die gradiënt van AB en BC en toon vervolgens dat hoek ABC gelyk is aan 90° .
(5)

(b) Gee die afstandformule en gebruik dit om die lengtes van sye AB , BC en AC van $\triangle ABC$ te bereken. (Laat jou antwoorde in wortelvorm.)
(5)

Algebra

1. Skryf die formele definisie van 'n eksponent neer sowel as die eksponentwette vir heelgetal eksponente.

(6)

2. Vereenvoudig: $\frac{2x^4y^8z^3}{4xy} \times \frac{x^7}{y^3z^0}$

(4)

Trigonometrie

1. 'n Vliegtuig styg op van 'n lughawe en vlieg 578 km in 'n rigting van 50° O van N. Die vlieënier verander dan van rigting en vlieg 321 km 10° W van N.

(a) Hoe ver weg van die lughawe is die vliegtuig? (Tot die naaste kilometer.)

(5)

(b) Bepaal die rigting en afstand van die vliegtuig vanaf die lughawe.

(5)

Oefeninge

Dit behels enige werk uit die handboek of 'n ander bron wat aan die leerder gegee word deur die opvoeder om in die klas óf tuis te voltooi. Opvoeders moet leerders aanmoedig om nie mekaar se werk te kopieer nie en moet opletterend en noukeurig wees in die nagaan van hierdie werk. Dit word aanbeveel dat hierdie tipe werk gemerk/gekontroleer sal word met behulp van 'n kontrolelys (hieronder) om die proses vir die opvoeder te bespoedig.

Die punte wat behaal word deur die leerder vir 'n spesifieke stuk werk moet nie gebaseer wees op korrekte of verkeerde antwoorde nie, maar verkieslik op die volgende:

- die poging van die leerder om antwoorde te produseer.
- die kwaliteit van die regstellings aan werk wat voorheen verkeerd was.
- die vermoë van die leerder om die inhoud van 'n paar geselekteerde voorbeelde (hetsy skriftelik of mondeling) te verduidelik.

Die volgende rubriek kan gebruik word om klas- of huiswerkoefeninge te assesser:

Kriteria	Prestasie-aanduiders		
Werk gedoen	2 Al die werk gedoen	1 Gedeeltelik voltooi	0 Geen werk gedoen
Werk netjies gedoen	2 Werk netjies gedoen	1 Sekere werk nie netjies gedoen nie	0 Slordig en deurmekaar
Regstellings gedoen	2 Deurgaans alle regstellings gedoen	1 Ten minste helfte van die regstellings gedoen	0 Geen regstellings gedoen
Korrekte wiskundige metode	2 Deurgaans	1 Soms	0 Glad nie
Begrip van wiskundige tegnieke en prosesse	2 Kan konsepte en prosesse akkuraat verduidelik	1 Verduidelikings is dubbelsinnig en nie gefokus nie	0 Verduidelikings is verwarrend of irrelevant

Joernaalinskrywings

'n Joernaalinskrywing is 'n poging deur 'n leerder om in geskrewe woorde uit te druk wat in Wiskunde gebeur. Dit is belangrik om in staat te wees om 'n wiskundige probleem en die oplossing daarvan in die geskrewe taal te verwoord. Dit kan op verskillende maniere gedoen word:

- Vandag in Wiskunde het ons geleer _____
- Skryf 'n brief aan 'n vriend wat siek was om te verduidelik wat vandag gebeur het in die klas.
- Verduidelik die denkproses agter die poging om 'n spesifieke wiskunde-probleem op te los, bv. skets die grafiek van $y = x^2 - 2x^2 + 1$ en verduidelik hoe om so 'n grafiek te teken.
- Gee 'n oplossing vir 'n probleem, besluit of dit korrek is, en indien nie, verduidelik die moontlike probleme wat ervaar word deur die persoon wat die verkeerde oplossing geskryf het.

'n Joernaal is 'n waardevolle hulpmiddel wat die opvoeder in staat stel om wiskundige wanopvattinge van die leerders te identifiseer. Die nasien van hierdie soort oefening kan gesien word as subjektief, maar 'n rubriek kan die taak vereenvoudig.

Die volgende rubriek kan gebruik word om joernaalinskrywings te merk. Die assesseringsrubriek moet aan leerders gegee word vir die taak gedoen word.

Taak	Bevoegd (2 Punte)	Ontwikkel nog (1 Punt)	Nog nie ontwikkel (1 Punt)
Voltooi binne tydsbeperking?			
Korrektheid van die verduideliking?			
Korrekte en toepaslike gebruik van wiskundige taal?			
Is die wiskunde korrek?			
Is die konsep korrek geïnterpreteer?			

Vertalings

Vertaling assesser die leerder se vermoë om woorde te vertaal in wiskundige notasie of om 'n verduideliking van wiskundige konsepte in woorde te gee. Dikwels wanneer leerders wiskundige taal en notasie korrek kan gebruik, toon hulle 'n groter begrip van die konsepte.

Byvoorbeeld:

Skryf die letter van die korrekte uitdrukking langs die ooreenstemmende nommer:

x word met 10 vermeerder	a) xy
Die produk van x en y	b) $x - 2$
Die som van 'n sekere getal en dubbel daardie getal	c) x^2
Helfte van 'n sekere getal vermenigvuldig met homself	d) $\frac{1}{2} \times 2$
Twee minder as x	e) $x + 2x$
'n Sekere getal vermenigvuldig met homself	f) $x + 10$

Groepwerk

Een van die beginsels in die NKV is om leerders te produseer wat in staat is om effektief te werk in groepsverband. Leerders vind dit oor die algemeen moeilik om te doen, daarom moet hulle aangemoedig word om in klein groepies te werk. Dikwels ontwikkel leerders 'n beter begrip van konsepte en prosesse wanneer hulle met bystand van hulle maats werk. Slim leerders vind hierdie tipe taak gewoonlik moeilik, en tog is dit belangrik dat hulle leer hoe om te help en effektief te kommunikeer met ander leerders.

Mind Maps of Metacogs

'n Metacog of "breinkaart" is 'n nuttige hulpmiddel. Dit help om idees te koppel en verbindings te vorm van sake wat andersins onverwagte voorgekom het. 'n Breinkaart kan gebruik word aan die begin of einde van 'n afdeling ten einde leerders 'n oorsigtelike perspektief van die werk te gee, of as 'n

herinnering aan 'n gedeelte van die werk wat reeds afgehandel is. Dit moet beklemtoon word dat dit nie 'n opsomming is nie. Ongeag hoe jy dit gebruik, dit is 'n geleentheid wat 'n leerder gegee word om navorsing te doen in 'n bepaalde veld en te kan toon dat hy/sy 'n begrip het van die betrokke afdeling.

Dit is 'n oopboek vorm van assessering en leerders kan enige materiaal gebruik wat hulle voel sal kan help. Daar word voorgestel dat hierdie aktiwiteit geoefen word, met behulp van ander onderwerpe, voor 'n breinkaart-toets voorgelê word vir portefeulje-assessering.

Na voltooiing van die beinkaart, moet die leerders in staat wees om insiggewende vrae daaroor te beantwoord. Dit is wat 'n breinkaart onderskei van 'n gewone opsomming van 'n afdeling van die werk. Leerders moet verwys na hul breinkaart wanneer die vrae beantwoord word, maar mag nie verwys na enige verwysingsmateriaal nie. Hier is 'n paar riglyne om aan leerders te gee waaraan voldoen moet word wanneer 'n breinkaart saamgestel word, sowel as twee voorbeelde om leerders te help om aan die gang te kom. 'n Assesseringsrubriek word ook voorsien. Dit moet beskikbaar gestel word aan die leerders voor hulle begin om hulle breinkaarte saam te stel. Op die volgende bladsy is 'n modelvraag vir 'n breinkaart, asook 'n paar voorbeelde van vrae wat gevra kan word binne die konteks van die samestelling van 'n breinkaart oor analitiese meetkunde.

'n Basiese breinkaart word op die volgende wyse saamgestel:

- Skryf die titel/onderwerp van die vak in die middel van die bladsy en trek 'n sirkel daar rondom.
- Vir die eerste hoofopskrif van die onderwerp, trek 'n streep uit die sirkel in enige rigting, en skryf die opskrif bo of onder die lyn.
- Vir die sub-opskrifte van die hoofopskrif, trek lyne vir elke onderafdeling uit die eerste lyn en benoem elkeen.
- Vir individuele feite, trek lyne uit die toepaslike opskrif.

'n Metacog (breinkaart) is 'n mens se persoonlike eiendom. Sodra iemand verstaan hoe om die basiese struktuur saam te stel, kan hulle hulle eie kodering en konvensies ontwikkel om dinge verder te neem, byvoorbeeld hoe om verbande en skakels tussen feite aan te toon. Die volgende wenke kan opvoeders en leerders help om die doeltreffendheid van hul breinkaarte te verbeter:

- Gebruik die enkele woorde of eenvoudige frases vir meer inligting. Oortollige woorde kompliseer die breinkaart en neem onnodige tyd om neer te skryf.
- Gebruik drukskrif: aanmekeer- of onduidelike skrif lees moeiliker en is minder aantreklik om na te kyk.
- Gebruik kleur om verskillende idees te skei - dit sal jou brein help om verskillende idees van mekaar te onderskei waar nodig, en help met visualisering van die breinkaart vir maklike herroeping. Kleur help ook om organisasie te wys.
- Gebruik simbole en diagramme/sketse waar van toepassing. As 'n simbool iets vir jou beteken en meer inligting oordra as woorde, gebruik dit. Prente/foto's help ook om inligting te onthou.
- Gebruik vorms, sirkels en raampies om brokkies inligting met mekaar te verbind - dit is 'n bykomende hulpmiddels om die groepering van inligting voor te stel.

Gebruik die konsep van analitiese meetkunde as jou onderwerp en konstrueer 'n breinkaart (of metacog) met al die inligting (insluitend terminologie, definisies, formules en voorbeelde) wat jy ken oor die onderwerp van analitiese meetkunde. Moontlike vrae om die leerder te vra na voltooiing van die breinkaart:

- Verduidelik kortliks wat die wiskunde onderwerp van analitiese meetkunde behels.

- Identifiseer en verduidelik die afstandformule, die afleiding daarvan en die gebruik daarvan op jou breinkaart.
- Hoe verskil of stem die berekening van gradiënt in analitiese meetkunde ooreen met die benadering wat gebruik word om die gradiënt te bereken wanneer daar met funksies gewerk word?

’n Voorgestelde eenvoudige rubriek vir nasien van ’n breinkaart:

Taak	Bevoegd (2 Punte)	In ontwikkeling (1 Punt)	Nog nie ontwikkel 1 Punt)
Betyds voltooi			
Hoofopskrifte			
Korrekte teorie (Formules, definisies, terminologie, ens.)			
Verduideliking			
“Leesbaarheid”			

10 punte vir die vrae wat gemerk is met behulp van die volgende skaal:

0: geen poging of ’n totaal verkeerde poging is gemaak

1: ’n korrekte poging is aangewend, maar die leerder het nie die korrekte antwoord gekry nie

2: ’n korrekte poging is aangewend en die antwoord is korrek

Ondersoeke

Ondersoeke bestaan uit oop vrae wat denkprosesse inisieer en uitbrei. Die aanleer en ontwikkeling van probleemoplossingsvaardighede is ’n noodsaaklike deel van die uitvoer van ondersoeke.

Dit word voorgestel dat 2 - 3 uur toegelaat word vir hierdie taak. Gedurende die eerste 30 - 45 minute behoort leerders aangemoedig te word om te praat oor die probleem, punte van verwarring uit te klaar, en die aanvanklike hipoteses met ander te bespreek. Die finale skriftelike weergawe moet individueel gedoen word en moet ongeveer vier bladsye beslaan.

Assessering van ondersoeke kan terugvoer of voordragte deur groepe of individue oor die resultate insluit, terwyl die volgende in gedagte gehou word:

- gebruik ’n logiese volgorde in die oplossing van probleme
- die pre-kennis wat nodig is om die probleem op te los
- die korrekte gebruik van wiskundige taal en notasie
- doelgerigtheid van die oplossing
- die kwaliteit van die geskrewe en mondelinge aanbieding

Enkele voorbeelde van voorgestelde assesseringskale ingesluit is op die volgende paar bladsye, gevolg deur ’n seleksie van onderwerpe vir moontlike ondersoeke. Die volgende riglyne moet aan leerders voorsien word voordat hulle ’n ondersoek begin:

Algemene instruksies aan leerders

- Jy kan enige van die gegewe projekte of ondersoeke kies (kyk modelvraag oor ondersoeke).
- Volg die instruksies wat saam met elke taak gegee word noukeurig aangesien dit beskryf hoe die finale produk aangebied moet word.
- Julle mag die probleem in groepe bespreek om kwessies uit te klaar, maar elke individu moet sy/haar eie weergawe op skrif stel.
- Kopiëring van mede-leerders sal meebring dat die taak gediskwalifiseer word.
- Jou opvoeders is 'n bron van hulp vir jou, en al sal hulle nie antwoorde of oplossings verskaf nie, kan hulle genader word vir wenke.

Die aanbieding

Die ondersoek moet ingehandig word op die datum deur jou opvoeder bepaal. Dit moet ten minste die volgende bevat:

- 'n beskrywing van die probleem
- 'n bespreking van die manier waarop jy te werk gaan om die probleem te hanteer
- 'n beskrywing van die finale resultaat met 'n toepaslike motivering oor die geldigheid van die oplossing
- persoonlike refleksies wat wiskundige of ander lesse wat geleer is, insluit, sowel as die gevoelens wat ervaar is in die ondersoek van die probleem.
- die geskrewe weergawe moet aantreklik en netjies aangebied word op sowat vier A4-bladsye.
- hoewel die gebruik van tegnologie in die aanbieding aangemoedig word, moet die wiskundige inhoud en prosesse die hoofokus bly.

Hier is 'n paar voorbeelde van 'n moontlike rubriek wat gebruik kan word vir die nasien van die ondersoek:

Vlak van prestasie	Kriteria
4	• Bevat 'n volledige antwoord. • Duidelike, samehangende, ondubbelsinnige en elegante verduideliking. • Sluit duidelike en eenvoudige diagramme in waar van toepassing. • Toon begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer die belangrikste elemente van die vraag. • Sluit voorbeelde en teenvoorbeelde in. • Gee sterk ondersteunende argumente. • Gaan verder as die vereistes van die probleem.
3	• Bevat 'n volledige antwoord. • Verduideliking minder elegant, minder volledig. • Toon begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer die belangrikste elemente van die vraag. • Gaan nie verder as die vereistes van die probleem nie.
2	• Bevat 'n onvolledige antwoord. • Verduideliking is nie logies en duidelik nie. • Toon 'n mate van begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer sommige van die belangrikste elemente van die vraag. • Bied argumente aan, maar onvolledig. • Sluit diagramme in, maar onvanpas of onduidelik.
1	• Bevat 'n onvolledige antwoord. • Laat belangrike dele van die vraag of die hele vraag en antwoord weg. • Bevat groot foute. • Gebruik onvanpaste strategieë.
0	• Geen sigbare antwoord of poging.

Mondelinge Assessering

'n Mondelinge assessering behels dat die leerder aan die hele klas of 'n groep of die opvoeder verduidelik wat hy/sy verstaan van 'n konsep of 'n probleem of spesifieke vrae beantwoord. Die fokus hier is op die korrekte gebruik van wiskundige taal deur die leerders; die bondigheid en logiese volgorde van die verduidelikings, sowel as hul kommunikasievaardighede.

Mondelinge gedoen kan op 'n aantal maniere gedoen word:

- 'n Leerder verduidelik die oplossing van 'n huiswerkprobleem wat deur die opvoeder gekies is.
- Die opvoeder vra die leerder 'n spesifieke vraag of 'n stel vrae om seker te maak dat die leerder verstaan en evalueer die leerder op sy/haar verduideliking.
- Die opvoeder neem 'n groep leerders waar wat interaksie het met mekaar en assesseer die leerders op hul bydraes en verduidelikings binne die groep.
- 'n Punt word toegeken aan die groep as geheel, op grond van die antwoord wat enige lid van die groep gee op 'n vraag.

'n Voorbeeld van 'n merkrubriek vir 'n mondeling: 1 - die leerder het die vraag verstaan en probeer om dit te beantwoord

2 - die leerder gebruik die korrekte wiskundige taal

2 - die verklaring van die leerder volg 'n logiese progressie

2 - die leerder se verduideliking is bondig en akkuraat

2 - die leerder toon 'n begrip van die konsep wat verduidelik is

1 - die leerder demonstreer goeie kommunikasievaardighede

Maksimum punt = 10

'n Voorbeeld van 'n eweknie-assesseringsrubriek vir 'n mondeling::

My naam: _____

Naam van persoon wat ek assesseer: _____

Kriteria	Punt toegeken	Maksimum punt
Korrekte antwoord		2
Helderheid van verduideliking		3
Korrektheid van verduideliking		3
Bewyse van begrip		2
Totaal		10

Hoofstuk Kontekste

Algebraïese uitdrukkings

Algebra verskaf die grondslag vir wiskunde leerders om te beweeg van numeriese berekeninge na die veralgemening van bewerkings, vereenvoudiging van uitdrukkings, oplos van vergelykings en ongelykhede en die gebruik van grafieke in die oplos van kontekstuele probleme. Uitbreiding van hakies en faktoriserings is die kernvaardighede in die proses van die vereenvoudiging van uitdrukkings en die oplos van vergelykings in wiskunde. Identifisering van irrasionale getalle en die kennis van hulle benaderde posisies op 'n getallelyn of grafiek is 'n belangrike deel van enige wiskundige berekeninge en prosesse wat verder beweeg as die basiese stelsel van heelgetalle. Afronding van irrasionale getalle (soos die waarde van π) wanneer dit nodig is, help wiskunde leerders om doeltreffend te werk met getalle wat andersins moeilik sou wees om akkuraat te bepaal, te gebruik en te verstaan.

Wanneer die leerders die basiese getallestelsel van heelgetalle onder die knie het, is dit noodsaaklik dat hulle begrip van die getalle tussen die heelgetalle ook uitgebrei word. Dit sluit bewerkings in met breuke, desimale getalle en wortels, wat 'n integrale deel uitmaak van die meeste wiskundige berekeninge in werklike lewende kontekste.

Skatting is 'n uiters belangrike komponent van wiskunde. Dit stel leerders in staat om te werk met 'n sakrekenaar of om moontlike oplossings voor te stel, terwyl hysy ook in staat is om te oordeel hoe akkuraat en realisties die antwoorde is – 'n vaardigheid wat relevant is vir ander vakke ook.

Vergelykings en ongelykhede

As leerders later suksesvol wil werk met funksies en grafieke en die interpretasie daarvan, moet hulle begrip van en vaardighede in die oplos van vergelykings en ongelykhede goed ontwikkel word.

Eksponente

Eksponensiële notasie is 'n sentrale deel van wiskunde in numeriese berekenings asook in algebraïese beredenerings en vereenvoudigings. Dit is ook noodsaaklike vir leerders om sekere finansiële begrippe soos saamgestelde rente, vermeerdering en vermindering goed te verstaan.

Getalpatrone

Baie van wiskunde wentel rondom die identifisering van patrone. Soos in vorige grade leerders sien patrone in die vorm van foto's en nommers. In hierdie hoofstuk gaan ons kyk na die wiskunde van patrone. Patrone is herhalende volgordes, en kan gevind word in die natuur, vorms, gebeure, stel van getalle en amper oral waar jy omgee om te kyk. Byvoorbeeld, sade in 'n sonneblom, sneeuvlokkies, geometriese ontwerpe op quilts of teëls, die nommer volgorde 0; 4; 8; 12; 16; ...

Funksies

Funksies vorm 'n sentrale deel van die leerders se wiskundige begrip van en redenasieprosesse in algebra. Dit bied ook 'n uitstekende geleentheid vir kontekstuele wiskundige modelleringsvrae. Funksies is wiskundige boustene vir die ontwerp van masjiene, die voorspelling van natuurrampe, genesing van siektes, begrip van die ekonomieë in die wêreld en om vliegtuie in die lug te hou. 'n Nuttige voordeel van funksies is dat hulle ons toelaat om verhoudings deur middel van 'n grafiek te visualiseer. Die grafiese voorstelling van funksies is baie makliker om te lees en te interpreteer as 'n lys van getalle. Benewens die gebruik daarvan in die probleme van die mensdom, verskyn funksies ook op 'n dag-tot-dag vlak, sodat dit die moeite werd is om van hulle te leer. Die waarde van 'n funksie is altyd afhanklik van een of meer veranderlikes, soos tyd, afstand of 'n meer abstrakte hoeveelheid.

Finansies en groei

Die wiskunde van finansies is baie relevant vir die daaglikse en langtermyn finansiële besluite wat leerders sal moet neem ten opsigte van beleggings, die uitneem van lenings, spaar en die begrip van wisselkoerse en hulle globale invloed.

Trigonometrie

Daar is baie toepassings van trigonometrie. Van besondere waarde is die tegniek van triangulering, wat in sterrekunde gebruik is om die afstande te meet na die nabygeleë sterre, in geografie om afstande tussen landmerke te meet, en satellietnavigasie, GPS (Global Positioning System), sou nie moontlik wees sonder trigonometrie nie. Ander velde wat gebruik maak van trigonometrie sluit in akoestiek, optika, ontleding van finansiële markte, elektronika, waarskynlikheidsleer, statistiek, biologie, mediese beelding (CAT-skanderings en ultraklank), chemie, kriptologie, weerkunde, oseaanografie, landmeting, argitektuur, fonetiek, ingenieurswese, rekenaargrafika en spelontwikkeling.

Analitiese meetkunde

Hierdie afdeling verskaf 'n verdere toepassing vir leerders se algebraïese en trigonometriese interaksie met die Cartesiese vlak. Kunstenaars, en die ontwerp- en uitlegindustrie maak dikwels gebruik van die inhoud en denkprosesse van hierdie wiskundige onderwerp.

Statistiek

Burgers word daaglik gekonfronteer met die interpretasie van data wat aangebied word deur die media. Hierdie data mag soms bevooroordeeld wees, of verkeerd geïnterpreteer word binne 'n sekere konteks. In enige soort navorsing is die insameling en hantering van data 'n kernfunksie. Hierdie onderwerp bied ook onderrig aan leerders ten einde hulle sosiaal en polities geletterd te maak ten opsigte van die media.

Waarskynlikheid

Hierdie onderwerp is nuttig in die ontwikkeling van goeie logiese beredenering in die leerders en vir die opvoeding van hulle in terme van die werklike lewe kwessies soos dobbelary en die moontlike

slaggate daarvan. Ons maak gebruik van waarskynlikheid onseker gebeure te beskryf: as jy per ongeluk laat val 'n sny brood, jy weet nie of dit gaan om te val met die gesmeerde kant opwaarts of afwaarts. Wanneer jou gunsteling sport span speel 'n speletjie, jy weet nie of hulle wen of nie. Wanneer die weerman sê daar is 'n 40%-kans op reën môre, jy mag of nie mag nie die einde om nat te word. Onsekerheid bied self tot 'n mate in elke gebeurtenis wat rondom ons en in elke besluit wat maak ons.

Euklidiese meetkunde

Die denkprosesse en wiskundige vaardighede in die bewys van veronderstellings en die identifisering van valse veronderstellings is meer relevant hier as die werklike inhoud wat bestudeer word. Die oppervlakte en volume inhoude wat bestudeer word in die regte-lewe kontekste van die ontwerp van kombuise, teëlwerk, die verf van kamers, die ontwerp van pakkette ens., is uiters relevant vir die huidige en toekomstige lewens van leerders. Euklidiese meetkunde hanteer ruimte en vorm met behulp van 'n stelsel van logiese afleidings.

Meting

Hierdie hoofstuk hersien die volume en buite-oppervlakte van drie-dimensionele voorwerpe, ook bekend as vaste liggame. Die hoofstuk dek die volume en oppervlakte van prisma's en silinders. Oefeninge dek die berekening van die oppervlakte en volume van veelhoeke, prisma's, piramides, keëls en sfere, sowel as saamgestelde voorwerpe. Die invloed van die vermenigvuldiging van een of meer afmetings van 'n voorwerp met 'n faktor (k) word ook ondersoek.

Oplossings van oefeninge

Hierdie hoofstuk sluit die oplossings in van die oefeninge wat in elke hoofstuk van die boek gegee word.

Deel II

Oplossings

Oefening 1 - 1

1. Sê of die volgende getalle rasionaal of irrasionaal is. As die getal rasionaal is, sê of dit 'n natuurlike getal, telgetal of heelgetal is:

(a) $-\frac{1}{3}$

(b) $0,651268962154862\dots$

(c) $\frac{\sqrt{9}}{3}$

(d) π^2

2. As a 'n heel getal is, b 'n heel getal is en c is irrasionaal, watter van die volgende is rasionale getalle?

(a) $\frac{5}{6}$

(b) $\frac{a}{3}$

(c) $\frac{-2}{b}$

(d) $\frac{1}{c}$

3. Vir watter van die volgende waardes van a is $\frac{a}{14}$ rasionaal of irrasionaal?

(a) 1

(b) -10

(c) $\sqrt{2}$

(d) 2,1

4. Skryf die volgende as breuke:

(a) 0,1

(b) 0,12

(c) 0,58

(d) 0,2589

5. Skryf die volgende in repeterende (herhalende) desimale notasie:

(a) $0,11111111\dots$

(b) $0,1212121212\dots$

(c) $0,123123123123\dots$

(d) $0,11414541454145\dots$

6. Skryf die volgende in repeterende (herhalende) desimale notasie:

(a) $\frac{2}{3}$

(b) $1\frac{3}{11}$

(c) $4\frac{5}{6}$

(d) $2\frac{1}{9}$

7. Skryf die volgende in breukvorm:

(a) $0,\dot{5}$

(b) $0,6\dot{3}$

(c) $5,\overline{31}$

Oplossings vir Oefening 1 - 1

1. (a) Rasionaal, heelgetal

(b) Irrasionaal

(c) Rasionaal, heelgetal, telgetal, natuurlike getal

(d) Irrasionaal

2. (a) Rasionaal

(b) Rasionaal

(c) Rasionaal

(d) Irrasionaal

3. (a) Rasionaal

(b) Rasionaal

(c) Irrasionaal

(d) Rasionaal

4. (a) $0,1 = \frac{1}{10}$

(b) $0,12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$

(c) $0,58 = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$

(d) $0,2589 = \frac{2\,589}{10\,000}$

5. (a) $0,\dot{1}$

(b) $0,\overline{12}$

(c) $0,\overline{123}$

(d) $0,114\overline{145}$

6. (a) $\frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3}\right)$
 $= 2(0,333333\dots)$
 $= 0,666666\dots$
 $= 0,\dot{6}$

(b) $1\frac{3}{11} = 1 + 3\left(\frac{1}{11}\right)$
 $= 1 + 3(0,090909\dots)$
 $= 1 + 0,272727\dots$

$= 1,\overline{27}$

(c) $4\frac{5}{6} = 4 + 5\left(\frac{1}{6}\right)$
 $= 4 + 5(0,166666\dots)$
 $= 4 + 0,833333\dots$
 $= 4,8\dot{3}$

(d) $2\frac{1}{9} = 2 + 0,111111\dots$
 $= 2,\dot{1}$

7. (a) $x = 0,55555$ en

$10x = 5,55555$

$\therefore 10x - x = 9x$

$= 5$

$\therefore x = \frac{5}{9}$

(b) $10x = 6,3333$ en

$$\begin{aligned} 100x &= 63,3333 \\ \therefore 100x - 10x &= 90x \\ &= 57 \\ \therefore x &= \frac{57}{90} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } x &= 5,313131 \text{ en} \\ 100x &= 531,313131 \\ \therefore 100x - x &= 99x = \\ &526 \\ \therefore x &= \frac{526}{99} \end{aligned}$$

Oefening 1 - 2

Skryf die volgende getalle tot 3 desimale plekke:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. 12,56637061... | 4. 1,912931183... |
| 2. 3,31662479... | 5. 6,32455532... |
| 3. 0,26666666... | 6. 0,05555555... |

Oplossings vir Oefening 1 - 2

- | | |
|------------|----------|
| 1. 12,5666 | 4. 1,913 |
| 2. 3,317 | 5. 6,325 |
| 3. 0,267 | 6. 0,056 |

Oefening 1 - 3

Vind twee opeenvolgende heelgetalle wat weerskante van die getalle lê, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

- | | |
|----------------|-------------------|
| 1. $\sqrt{18}$ | 3. $\sqrt[3]{5}$ |
| 2. $\sqrt{29}$ | 4. $\sqrt[3]{79}$ |

Oplossings vir Oefening 1 - 3

1. 4 en 5 ($4^2 = 16$ en $5^2 = 25$)

2. 5 en 6 ($5^2 = 25$ en $6^2 = 36$)

3. 1 en 2 ($1^3 = 1$ en $2^3 = 8$)

4. 4 en 5 ($4^3 = 64$ en $5^3 = 125$)

Oefening 1 - 4

Vind die produkte:

1. $2y(y + 4)$

2. $(y + 5)(y + 2)$

3. $(2 - t)(1 - 2t)$

4. $(x - 4)(x + 4)$

5. $(2p + 9)(3p + 1)$

6. $(3k - 2)(k + 6)$

7. $(s + 6)^2$

8. $-(7 - x)(7 + x)$

9. $(3x - 1)(3x + 1)$

10. $(7k + 2)(3 - 2k)$

11. $(1 - 4x)^2$

12. $(-3 - y)(5 - y)$

13. $(8 - x)(8 + x)$

14. $(9 + x)^2$

15. $(-2y^2 - 4y + 11)(5y - 12)$

16. $(7y^2 - 6y - 8)(-2y + 2)$

17. $(10y + 3)(-2y^2 - 11y + 2)$

18. $(-12y - 3)(12y^2 - 11y + 3)$

19. $(-10)(2y^2 + 8y + 3)$

20. $(2y^6 + 3y^5)(-5y - 12)$

21. $(-7y + 11)(-12y + 3)$

22. $(7y + 3)(7y^2 + 3y + 10)$

23. $9(8y^2 - 2y + 3)$

24. $(-6y^4 + 11y^2 + 3y)(y + 4)(y - 4)$

Oplossings vir Oefening 1 - 4

1. $2y(y + 4) = 2y^2 + 8y$

2. $(y + 5)(y + 2)$
 $= y^2 + 2y + 5y + 10$

$= y^2 + 7y + 10$

3. $(2 - t)(1 - 2t)$
 $= 2 + 4t - t + 2t^2$

- $$= 2 + 3t + 2t^2$$
4. $(x-4)(x+4)$
 $= x^2 + 4x - 4x - 16$
 $= x^2 - 16$
5. $(2p+9)(3p+1)$
 $= 6p^2 + 2p + 27p + 9$
 $= 6p^2 + 29p + 9$
6. $(3k-2)(k+6)$
 $= 3k^2 + 18k - 2k - 12$
 $= 3k^2 + 16k - 12$
7. $(s+6)^2$
 $= s^2 + 6s + 6s + 36$
 $= s^2 + 12s + 36$
8. $-(7-x)(7+x)$
 $= -(49 + 7x - 7x - x^2)$
 $= -(49 - x^2)$
 $= -49 + x^2$
9. $(3x-1)(3x+1)$
 $= 9x^2 + 3x - 3x - 1$
 $= 9x^2 - 1$
10. $(7k+2)(3-2k)$
 $= 21k - 14k^2 + 6 - 4k$
 $= 14k^2 + 17k + 6$
11. $(1-4x)^2$
 $= (1-4x)(1-4x)$
 $= 1 - 4x - 4x + 16x^2$
 $= 1 - 8x + 16x^2$
12. $(-3-y)(5-y)$
 $= -15 + 3y - 5y + y^2$
 $= y^2 - 2y - 15$
13. $(8-x)(8+x)$
 $= 16 + 8x - 8x - x^2$
 $= 16 - x^2$
14. $(9+x)^2$
- $= (9+x)(9+x)$
 $= 81 + 9x + 9x + x^2$
 $= 81 + 18x + x^2$
15. $(-2y^2 - 4y + 11)(5y - 12)$
 $= -10y^3 + 24y^2 - 20y^2 + 48y + 55y - 132$
 $= -10y^3 + 4y^2 + 103y - 132$
16. $(7y^2 - 6y - 8)(-2y + 2)$
 $= -14y^3 + 14y^2 + 12y^2 - 12y + 16y - 16$
 $= -14y^3 + 26y^2 + 4y - 16$
17. $(10y + 3)(-2y^2 - 11y + 2)$
 $= -20y^3 - 110y^2 + 20y - 6y^2 - 33y + 6$
 $= -20y^3 - 116y^2 - 13y + 6$
18. $(-12y - 3)(12y^2 - 11y + 3)$
 $= -144y^3 + 132y^2 - 36y - 36y^2 + 33y - 9$
 $= -144y^3 + 96y^2 - 3y - 9$
19. $(-10)(2y^2 + 8y + 3) = -20y^2 - 80y - 30$
20. $(2y^6 + 3y^5)(-5y - 12)$
 $= -10y^7 - 24y^6 - 15y^6 - 36y^5$
 $= -10y^7 - 39y^6 - 36y^5$
21. $(-7y + 11)(-12y + 3)$
 $= 84y^2 - 21y - 132y + 33$
 $= 84y^2 - 153y + 33$
22. $(7y + 3)(7y^2 + 3y + 10)$
 $= 49y^3 + 21y^2 + 70y + 21y^2 + 9y + 10$
 $= 49y^3 + 42y^2 + 79y + 10$
23. $9(8y^2 - 2y + 3) = 72y^2 - 18y + 27$
24. $(-6y^4 + 11y^2 + 3y)(10y + 4)(4y - 4)$
 $= (-6y^4 + 11y^2 + 3y)(y^2 + 16)$
 $= -6y^6 - 96y^4 + 11y^4 + 176y^2 + 3y^3 + 48y$
 $= -6y^6 - 85y^4 + 3y^3 + 176y^2 + 48y$

Oefening 1 - 5

Faktoriseer:

1. $2l + 2w$
2. $12x + 32y$
3. $6x^2 + 2x + 10x^3$
4. $2xy^2 + xy^2z + 3xy$
5. $-2ab^2 - 4a^2b$
6. $7a + 4$
7. $20a - 10$
8. $18ab - 3bc$
9. $12kj + 18kq$
10. $16k^2 - 4$
11. $3a^2 + 6a - 18$
12. $-12a + 24a^3$
13. $-2ab - 8a$
14. $24kj - 16k^2j$
15. $-a^2b - b^2a$
16. $12k^2j + 24k^2j^2$
17. $72b^2q - 18b^3q^2$
18. $4(y - 3) + k(3 - y)$
19. $a^2(a - 1) - 25(a - 1)$
20. $bm(b + 4) - 6m(b + 4)$
21. $a^2(a + 7) + 9(a + 7)$
22. $3b(b - 4) - 7(4 - b)$
23. $a^2b^2c^2 - 1$

Oplossings vir Oefening 1 - 5

1. $2l + 2w = 2(l + w)$
2. $12x + 32y = 4(3x + 8y)$
3. $6x^2 + 2x + 10x^3 = 2x(3x + 1 + 5x^2)$
4. $2xy^2 + xy^2z + 3xy = xy(2y^2 + yz + 3)$
5. $-2ab^2 - 4a^2b = -2ab(b + a)$
6. $7a + 4 = 7a + 4$
7. $20a - 10 = 10(2a - 1)$
8. $18ab - 3bc = 3b(6a - c)$
9. $12kj + 18kq = 6k(2j + 3q)$
10. $16k^2 - 4 = (4k - 2)(4k + 2)$
11. $3a^2 + 6a - 18 = 3(a^2 + 2a - 9)$
12. $-12a + 24a^3 = 12a(2a^2 - 1)$
13. $-2ab - 8a = -2a(b + 4)$
14. $24kj - 16k^2j = 8kj(3 - 2k)$
15. $-a^2b - b^2a = -ab(a + b)$
16. $12k^2j + 24k^2j^2 = 12jk^2(2j + 1)$
17. $72b^2q - 18b^3q^2 = 18b^2q(4 - bq)$
18. $4(y - 3) + k(3 - y) = (3 - y)(-4 + k)$
19. $a^2(a - 1) - 25(a - 1)$
 $= (a - 1)(a^2 - 25)$
 $= (a - 1)(a - 5)(a + 5)$
20. $bm(b + 4) - 6m(b + 4)$
 $= (b + 4)(bm - 6m)$
 $= (b + 4)(m)(b - 6)$
21. $a^2(a + 7) + 9(a + 7) = (a + 7)(a^2 + 9)$
22. $3b(b - 4) - 7(4 - b) = (b - 4)(3b + 7)$
23. $a^2b^2c^2 - 1 = (abc - 1)(abc + 1)$

Oefening 1 - 6

Faktoriseer die volgende:

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 1. $6x + a + 2ax + 3$ | 4. $a^2 - 2a - ax + 2x$ |
| 2. $x^2 - 6x + 5x - 30$ | 5. $5xy - 3y + 10x - 6$ |
| 3. $5x + 10y - ax - 2ay$ | 6. $ab - a^2 - a + b$ |

Oplossings vir Oefening 1 - 6

- | | |
|---|---|
| 1. $6x + a + 2ax + 3$
$= 3(2x + 1) + a(2x + 1)$
$= (3 + a)(2x + 1)$ | $= (5 - a)(x + 2y)$ |
| 2. $x^2 - 6x + 5x - 30$
$= x(x - 6) + 5(x - 6)$
$= (x + 5)(x - 6)$ | 4. $a^2 - 2a - ax + 2x$
$= a(a - 2) - x(a - 2)$
$= (a - x)(a - 2)$ |
| 3. $5x + 10y - ax - 2ay$
$= 5(x + 2y) - a(x + 2y)$ | 5. $5xy - 3y + 10x - 6$
$= y(5x - 3) + 2(5x - 3)$
$= (y + 2)(5x - 3)$ |
| | 6. $ab - a^2 - a + b = (-a + b)(a + 1)$ |

Oefening 1 - 7

1. Faktoriseer die volgende:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| (a) $x^2 + 8x + 15$ | (d) $x^2 + 9x + 14$ |
| (b) $x^2 + 10x + 24$ | (e) $x^2 + 15x + 36$ |
| (c) $x^2 + 9x + 8$ | (f) $x^2 + 12x + 36$ |

2. Ontbind die volgende in faktore:

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| (a) $x^2 - 2x - 15$ | (d) $x^2 + x - 20$ |
| (b) $x^2 + 2x - 3$ | (e) $x^2 - x - 20$ |
| (c) $x^2 + 2x - 8$ | (f) $2x^2 + 22x + 20$ |

3. Vind die faktore van die volgende drieterme:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| (a) $3x^2 + 19x + 6$ | (c) $12x^2 + 8x + 1$ |
| (b) $6x^2 + 7x + 1$ | (d) $8x^2 + 6x + 1$ |

4. Faktoriseer:

(a) $3x^2 + 17x - 6$

(b) $7x^2 - 6x - 1$

(c) $8x^2 - 6x + 1$

(d) $6x^2 - 15x - 9$

Oplossings vir Oefening 1 - 7

1. (a) $x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$

(b) $x^2 + 10x + 24 = (x + 6)(x + 4)$

(c) $x^2 + 9x + 8 = (x + 8)(x + 1)$

2. (a) $x^2 - 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$

(b) $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

(c) $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$

(d) $x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$

(d) $x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$

(e) $x^2 + 15x + 36 = (x + 12)(x + 3)$

(f) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)(x + 6)$

(e) $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$

(f) $2x^2 + 22x + 20$
 $= 2(x^2 + 11x + 10)$
 $= 2(x + 10)(x + 1)$

3. (a) $3x^2 + 19x + 6 = (3x + 1)(x + 6)$

(b) $6x^2 + 7x + 2 = (6x + 1)(x + 1)$

(c) $12x^2 + 8x + 1 = (6x + 1)(2x + 1)$

(d) $8x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)(4x + 1)$

4. (a) $3x^2 + 17x - 6 = (3x + 1)(x + 6)$

(b) $7x^2 - 6x - 1 = (7x + 1)(x - 1)$

(c) $8x^2 - 6x + 1 = (4x - 1)(2x - 1)$

(d) $6x^2 - 15x - 9 = (6x + 3)(x - 3)$

Oefening 1 - 8

Faktoriseer:

1. $x^3 + 8$

2. $27 - m^3$

3. $2x^3 - 2y^3$

4. $3k^3 + 27q^3$

5. $64t^3 - 1$

6. $64x^2 - 1$

7. $125x^3 + 1$

8. $25x^2 + 1$

9. $z - 125z^4$

10. $8m^6 + n^9$

11. $p^{15} - \frac{1}{8}y^{12}$

12. $1 - (x - y)^3$

Oplossings vir Oefening 1 - 8

1. $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
2. $27 - m^3 = (3 - m)(9 + 3m + m^2)$
3. $2x^3 - 2y^3$
 $= 2(x^3 - y^3)$
 $= 2(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
4. $3k^3 + 27q^3$
 $= 3(k^3 + 27q^3)$
 $= 3(k + 3q)(k^2 - 3kq + 9q^2)$
5. $64t^3 - 1 = (4t - 1)(16t^2 + 4t + 1)$
6. $64x^2 - 1 = (8x - 1)(8x + 1)$
7. $125x^3 + 1 = (5x + 1)(25x^2 - 5x + 1)$
8. $25x^2 + 1 =$ Geen oplossing
9. $z - 125z^4$
 $= z(1 - 125z^3)$
 $= z(1 - 5z)(1 + 5z + 25z^2)$
10. $8m^6 + n^9$
 $= (2m^2)^3 + (n^3)^3$
 $= (2m^2 + n^3)(4m^4 - 2m^2n^3 + n^6)$
11. $p^{15} - \frac{1}{8}y^{12}$
 $= (p^5)^3 - (\frac{1}{2}y^4)^3$
 $= (p^5 - \frac{1}{2}y^4)(p^{10} + \frac{1}{2}p^5y^4 + \frac{1}{4}y^8)$ Or:
 $p^{15} - \frac{1}{8}y^{12}$
 $= \frac{1}{8}(8p^{15} - y^{12}) - \frac{1}{8}(2p^5 - y^4)(4p^{10} + 2p^5y^4 + y^8)$
12. $1 - (x - y)^3$
 $= [1 - (x - y)][1 + (1)(x - y) + (x - y)^2]$
 $= [1 - x + y][1 + x - y + x^2 - 2xy + y^2]$

Oefening 1 - 9

Vereenvoudig (aanvaar alle noemers is nie nul nie):

1. $\frac{3a}{15}$
2. $\frac{2a + 10}{4}$
3. $\frac{5a + 20}{a + 4}$
4. $\frac{a^2 - 4a}{a - 4}$
5. $\frac{3a^2 - 9a}{2a - 6}$
6. $\frac{9a + 27}{9a + 18}$
7. $\frac{6ab + 2a}{2b}$
8. $\frac{16x^2y - 8xy}{12x - 6}$
9. $\frac{4xyp - 8xp}{12xy}$
10. $\frac{3a + 9}{14} \div \frac{7a + 21}{a + 3}$
11. $\frac{a^2 - 5a}{2a + 10} \times \frac{4a}{3a + 15}$
12. $\frac{3xp + 4p}{8p} \div \frac{12p^2}{3x + 4}$
13. $\frac{24a - 8}{12} \div \frac{9a - 3}{6}$
14. $\frac{a^2 + 2a}{5} \div \frac{2a + 4}{20}$
15. $\frac{p^2 + pq}{7p} \times \frac{21q}{8p + 8q}$
16. $\frac{5ab - 15b}{4a - 12} \div \frac{6b^2}{a + b}$

17. $\frac{f^2a - fa^2}{f - a}$
18. $\frac{2}{xy} + \frac{4}{xz} + \frac{3}{yz}$
19. $\frac{5}{t-2} - \frac{1}{t-3}$
20. $\frac{k+2}{k^2+2} - \frac{1}{k+2}$
21. $\frac{t+2}{3q} + \frac{t+1}{2q}$
22. $\frac{3}{p^2-4} + \frac{2}{(p-2)^2}$
23. $\frac{x}{x+y} + \frac{x^2}{y^2-x^2}$
24. $\frac{1}{m+n} + \frac{3mn}{m^3+n^3}$
25. $\frac{h}{h^3-f^3} - \frac{1}{h^2+hf+f^2}$
26. $\frac{x^2-1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}$
27. $\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^3} - \frac{x^2+x+1}{x^3-1}$
28. $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2x}{x^3-1}$
29. $\frac{p^3+q^3}{p^2} \times \frac{3p-3q}{p^2-q^2}$
30. $\frac{1}{a^2-4ab+4b^2} + \frac{a^2+2ab+b^2}{a^3-8b^3} - \frac{1}{a^2-4b^2}$

Oplossings vir Oefening 1 - 9

1. $\frac{3a}{15} = \frac{a}{5}$
2. $\frac{2a+10}{4}$
 $= \frac{2(+5)}{4}$
 $= \frac{a+5}{2}$
3. $\frac{5a+20}{a+4} = 5$
4. $\frac{a^2-4a}{a-4} = a$
5. $\frac{3a^2-9a}{2a-6}$
 $= \frac{3a(a-3)}{2(a-3)}$
 $= \frac{3a}{2}$
6. $\frac{9a+27}{9a+18}$
 $= \frac{9(a+3)}{9(a+2)}$
 $= \frac{a+3}{a+2}$
7. $\frac{6ab+2a}{2b}$
 $= \frac{2a(3b+1)}{2b}$
 $= \frac{a(3b+1)}{b}$
8. $\frac{16x^2y-8xy}{12x-6} = \frac{4xy}{3}$
9. $\frac{4xyp-8xp}{12xy} = \frac{p(y-2)}{3y}$
10. $\frac{3a+9}{14} \div \frac{7a+21}{a+3} = \frac{3(a+3)}{98}$
11. $\frac{a^2-5a}{2a+10} \times \frac{4a}{3a+15} = \frac{4a^2(a-5)}{6(a+5)^2}$
12. $\frac{3xp+4p}{8p} \div \frac{12p^2}{3x+4} = \frac{(3x+4)^2}{96p^2}$
13. $\frac{24a-8}{12} \div \frac{9a-3}{6} = \frac{4}{3}$
14. $\frac{a^2+2a}{5} \div \frac{2a+4}{20} = 2a$
15. $\frac{p^2+pq}{7p} \times \frac{21q}{8p+8q} = \frac{3q}{8}$
16. $\frac{5ab-15b}{4a-12} \div \frac{6b^2}{a+b} = \frac{5(a+b)}{24b}$
17. $\frac{f^2a-fa^2}{f-a}$
 $= \frac{af(f-a)}{f-a}$
 $= af$
18. $\frac{2}{xy} + \frac{4}{xz} + \frac{3}{yz}$
 $= \frac{2z}{xyz} + \frac{4y}{xyz} + \frac{3x}{xyz}$

- $$= \frac{2z + 4y + 3x}{xyz}$$
19. $\frac{5}{t-2} - \frac{1}{t-3}$
- $$= \frac{5(t-3)}{(t-2)(t-3)} - \frac{t-2}{(t-2)(t-3)}$$
- $$= \frac{5(t-2)(t-3)}{(t-2)(t-3)}$$
- $$= 5$$
20. $\frac{k+2}{k^2+2} - \frac{1}{k+2}$
- $$= \frac{(k+2)(k+2) - (k^2+2)}{(k^2+2)(k+2)}$$
- $$= \frac{k^2+4k+4-k^2-2}{k^3+2k^2+2k+4}$$
- $$= \frac{2(k-1)}{(k^2+2)(k+2)}$$
21. $\frac{t+2}{3q} + \frac{t+1}{2q}$
- $$= \frac{2(t+2) + 3(t+1)}{6q}$$
- $$= \frac{5t+7}{6q}$$
22. $\frac{3}{p^2-4} + \frac{2}{(p-2)^2}$
- $$= \frac{3(p-2) + 2(p+2)}{(p-2)(p+2)(p-2)}$$
- $$= \frac{(p-2) + 2(p+2)}{(p+2)(p^2-4)}$$
- $$= \frac{(5p-2)}{(p-2)^2(p+2)}$$
23. $\frac{x}{x+y} + \frac{x^2}{y^2-x^2}$
- $$= \frac{x(x-y) - x^2}{(x+y)(x-y)}$$
28. $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2x}{x^3-1}$
- $$= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
- $$= \frac{x^2+x+1-2x(x-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$
- $$= \frac{x^2+x+1-2x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$
- $$= \frac{-x^2+3x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$
- $$= -\frac{x^2-3x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$
29. $\frac{p^3+q^3}{p^2} \times \frac{3p-3q}{p^2-q^2}$
- $$= \frac{(p+q)(p^2-pq+q^2)}{p^2} \times \frac{3(p-q)}{(p-q)(p+q)}$$
- $$= \frac{-xy}{x^2-y^2}$$
24. $\frac{1}{m+n} + \frac{3mn}{m^3+n^3}$
- $$= \frac{1}{m+n} + \frac{3mn}{(m+n)(m^2-mn+n^2)}$$
- $$= \frac{m^2-mn+n^2+3mn}{m^3-m^3}$$
- $$= \frac{m^2+2mn+n^2}{m^3-n^3}$$
- $$= \frac{m+1}{m^2-mn+n^2}$$
25. $\frac{h}{h^3-f^3} - \frac{1}{h^2+hf+f^2}$
- $$= \frac{h}{(h-f)(h^2+hf+f^2)} - \frac{1}{h^2+hf+f^2}$$
- $$= \frac{h-(h-f)}{h^3-f^3}$$
- $$= \frac{f}{h^3-f^3}$$
26. $\frac{x^2-1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}$
- $$= \frac{2x-1}{6}$$
27. $\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^3} - \frac{x^2+x+1}{x^3-1}$
- $$= \frac{(x-1)^2}{(x-1)^3} - \frac{x^2+x+1}{x^3-1}$$
- $$= \frac{1}{(x-1)} - \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
- $$= \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)}$$
- $$= 0$$

$$= \frac{3(p^2 - pq + q^2)}{p^2}$$

$$\begin{aligned} 30. & \frac{1}{a^2 - 4ab + 4b^2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^3 - 8b^3} - \frac{1}{a^2 - 4b^2} \\ &= \frac{1}{(a - 2b)(a - 2b)} + \frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)} - \frac{1}{(a - 2b)(a + 2b)} \\ &= \frac{(a + 2b) + (a - 2b)(a + 2b) - (a - 2b)}{(a - 2b^2)(a + 2b)} \\ &= \frac{a + 2b + a^2 - 4b^2 - a + 2b}{(a - 2b^2)(a + 2b)} = \frac{a^2 + 4b - 4b^2}{(a - 2b^2)(a + 2b)} \end{aligned}$$

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Indien a 'n heelgetal is, b 'n heelgetal is en c irrasionaal is, watter van die volgende is rasionaal?

(a) $\frac{-b}{a}$

(b) $c \div c$

(c) $\frac{a}{c}$

(d) $\frac{1}{c}$

2. Skryf elkeen van die volgende as 'n onegte breuk:

(a) 0,12

(b) 0,006

(c) 1,59

(d) 12,277

3. Wys dat die desimaal $3,21\dot{1}\dot{8}$ 'n rasionale getal is.

4. Druk $0,7\dot{8}$ uit as 'n breuk $\frac{a}{b}$ waar $a, b \in \mathbb{Z}$ (wys alle stappe).

5. Skryf die volgende rasionale getalle tot 2 desimale plekke:

(a) $\frac{1}{2}$

(b) 1

(c) $0,1111\bar{1}$

(d) $0,9999\bar{9}$

6. Rond die volgende getalle af tot 3 desimale plekke:

(a) 3,141592654...

(b) 1,618033989...

(c) 1,41421356...

(d) 2,71828182845904523536...

7. Gebruik jou sakrekenaar om die volgende irrasionale getalle tot 4 desimale plekke te skryf:

(a) $\sqrt{2}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{5}$

(d) $\sqrt{6}$

8. Gebruik jou sakrekenaar (waar nodig) om die volgende getalle tot 5 desimale plekke te skryf en dui aan of die getal rasionaal of irrasionaal is:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (a) $\sqrt{8}$ | (f) $\sqrt{36}$ |
| (b) $\sqrt{768}$ | (g) $\sqrt{1960}$ |
| (c) $\sqrt{0,49}$ | (h) $\sqrt{0,0036}$ |
| (d) $\sqrt{0,0016}$ | (i) $-8\sqrt{0,04}$ |
| (e) $\sqrt{0,25}$ | (j) $5\sqrt{80}$ |

9. Skryf die volgende irrasionale getalle tot 3 desimale plekke, en skryf die afgeronde getal dan as 'n rasionale getal om 'n benadering van die irrasionale getal te verkry.

- | | |
|--------------------|-------------------------------|
| (a) 3,141592654... | (c) 1,41421356... |
| (b) 1,618033989... | (d) 2,71828182845904523536... |

10. Bepaal sonder 'n sakrekenaar tussen watter twee opeenvolgende heelgetalle die volgende irrasionale getalle lê:

- | | |
|-----------------|--------------------|
| (a) $\sqrt{5}$ | (e) $\sqrt[3]{5}$ |
| (b) $\sqrt{10}$ | (f) $\sqrt[3]{10}$ |
| (c) $\sqrt{20}$ | (g) $\sqrt[3]{20}$ |
| (d) $\sqrt{30}$ | (h) $\sqrt[3]{30}$ |

11. Vind twee opeenvolgende heelgetalle wat weerskante van $\sqrt{7}$ lê op die getallelyn.

12. Vind twee opeenvolgende heelgetalle wat weerskante van $\sqrt{15}$ lê op die getallelyn.

13. Faktoriseer:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| (a) $a^2 - 9$ | (l) $(16 - x^4)$ |
| (b) $m^2 - 36$ | (m) $7x^2 - 14x + 7xy - 14y$ |
| (c) $9b^2 - 81$ | (n) $y^2 - 7y - 30$ |
| (d) $16b^6 - 25a^2$ | (o) $1 - x - x^2 + x^3$ |
| (e) $m^2 - \frac{1}{9}$ | (p) $-3(1 - p^2) + p + 1$ |
| (f) $5 - 5a^2b^6$ | (q) $x - x^3 + y - y^3$ |
| (g) $16ba^4 - 81b$ | (r) $x^2 - 2x + 1 - y^4$ |
| (h) $a^2 - 10a + 25$ | (s) $4b(x^3 - 1) + x(1 - x^3)$ |
| (i) $16b^2 + 56b + 49$ | (t) $3p^3 - \frac{1}{9}$ |
| (j) $2a^2 - 12ab + 18b^2$ | (u) $8x^6 - 125y^9$ |
| (k) $-4b^2 - 144b^8 + 48b^5$ | (v) $(2 + p)^3 - 8(p + 1)^3$ |

14. Vereenvodig die volgende:

- | | |
|---|---|
| (a) $(a - 2)^2 - a(a + 4)$ | (g) $\frac{1}{a + 7} - \frac{a + 7}{a^2 - 49}$ |
| (b) $(5a - 4b)(25a^2 + 20ab + 16b^2)$ | (h) $\frac{x + 2}{2x^3} + 16$ |
| (c) $(2m - 3)(4m^2 + 9)(2m + 3)$ | (i) $\frac{1 - 2a}{4a^2 - 1} - \frac{a - 1}{2a^2 - 3a + 1} - \frac{1}{1 - a}$ |
| (d) $(a + 2b - c)(a + 2b + c)$ | (j) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 6} \times \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ |
| (e) $\frac{p^2 - q^2}{p} \div \frac{p + q}{p^2 - pq}$ | |
| (f) $\frac{2}{x} + \frac{x}{2} - \frac{2x}{3}$ | |

15. Wys dat $(2x - 1)^2 - (x - 3)^2$ vereenvoudig kan word tot $(x + 2)(3x - 4)$.
16. Bepaal wat moet by $x^2 - x + 4$ getel word sodat dit gelyk is aan $(x + 2)^2$?
17. Evalueer $\frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$ as $x = 7,85$ sonder om 'n sakrekenaar te gebruik. Toon jou bewerkings.
18. With what expression must $(a - 2b)$ be multiplied to get a product of $a^3 - 8b^3$?
19. With what expression must $27x^3 + 1$ be divided to get a quotient of $3x + 1$?

Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge

1. (a) Rasionaal (c) Irrasional
(b) Irrasional (d) Irrasional
2. (a) 0,12 (c) 1,59

$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$$

$$= \frac{12}{100}$$

$$= \frac{6}{50}$$

$$= \frac{3}{25}$$

$$= 1 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100}$$

$$= 1 \frac{59}{100}$$
- (b) 0,006 (d) $x = 12,2\dot{7}$

$$= \frac{6}{1000}$$

$$= \frac{3}{500}$$

$$10x = 122,7$$

$$100x = 1227,7$$

$$\therefore 100x - 10x = 90x = 1105$$

$$\therefore x = \frac{1105}{90} = \frac{221}{18}$$
3. $x = 3,21\overline{18}$

$$10\,000x = 32\,118,1\overline{8}$$

$$\therefore 10\,000x - x = 9\,999x = 32115$$

$$\therefore x = \frac{32\,115}{9\,999}$$

Hierdie is 'n rasionale getal omdat beide die teller en die nommer heeltallige is.
4. $x = 0,7\overline{8}$

$$100x = 78,7\overline{8}$$

$$\therefore 100x - x = 99x = \frac{78}{99}$$
5. (a) Om tot by twee desimale plekke af te rond moet ons na desimaal omskep: $\frac{1}{2} = 0,5$
 (b) Om tot by twee desimale plekke af te rond, voeg net 'n komma en twee 0's: 1,00
 (c) Ons merk waar die afsny punt is, besluit of dit bo of onder toe afrond moet wees ens skryf die antwoord. In hierdie voorbeeld is daar 'n 1 na die afsnypunt so ons hoef nie na bo af te rond nie. Die finale antwoord is: $0,11111\overline{1} \sim 0,11$
 (d) Herhaal die stappe in c) maar hierdie keer rond ons na bo af: $0,99999\overline{1} \sim 1,00$
6. Ons merk waar die afsny punt is, besluit of dit bo of onder toe afrond moet wees ens skryf die antwoord.
 (a) 3,142 (rond na boontoe omdat daar 'n 5 na die afsnypunt is)
 (b) 1,618 (geen afronding want daar 'n 0 na die afsnypunt is)

- (c) 1,414 (geen afronding want daar 'n 2 na die afsnypunt is)
 (d) 2,718 (rond na boontoe omdat daar 'n 2 na die afsnypunt is)

7. (a) 1,414 (c) 2,236
 (b) 1,732 (d) 2,449
8. (a) 2,82843 - irrasionaal (f) 6,00000 - rasionaal
 (b) 27,71281 - irrasionaal (g) 44,27189 - irrasionaal
 (c) 0,70000 - rasionaal (h) 0,06000 - rasionaal
 (d) 0,04000 - rasionaal (i) -4,00000 - rasionaal
 (e) 0,500000 - rasionaal (j) 44,72136 - irrasionaal

9. (a) $3 \frac{142}{1\,000} = \frac{1\,571}{500}$ (c) $1 \frac{414}{1000} \frac{707}{500}$
 (b) $1 \frac{618}{1000} = \frac{809}{500}$ (d) $2 \frac{718}{1000} = \frac{1\,359}{500}$

10. (a) 2 en 3 (e) 1 en 2
 (b) 3 en 4 (f) 2 en 3
 (c) 4 en 5 (g) 2 en 3
 (d) 5 en 6 (h) 3 en 4

11. 2 en 3

12. 3 en 4

13. (a) $a^2 - 9 = (a - 3)(a + 3)$ $= 7x(x - 2) + 7y(x - 2)$
 (b) $m^2 - 36 = (m + 6)(m - 6)$ $= (x - 2)(7x + 7y)$
 (c) $9b^2 - 81 = (3b - 9)(3b + 9)$ $= 7(x - 2)(x + y)$
 (d) $16b^6 - 25a^2 = (4b + 5a)(4b - 5a)$ (n) $y^2 - 7y - 30 = (y - 10)(y + 3)$
 (e) $m^2 - \frac{1}{9} = (m + \frac{1}{3})(m - \frac{1}{3})$ (o) $1 - x - x^2 + x^3$
 (f) $5 - 5a^2b^6$ $= (1 - x) - x^2(1 - x)$
 $= 5(1 - a^2b^6)$ $= (1 - x)(1 - x^2)$
 $= 5(1 - ab^3)(1 + ab^3)$ $= (1 - x)^2(1 + x)$
 (g) $16ba^4 - 81b$ (p) $-3(1 - p^2) + p + 1$
 $= b(4a^2 + 9)(4a^2 - 9)$ $= -3(1 - p)(1 + p) + (p + 1)$
 $= b(4a^2 + 9)(2a + 3)(2a - 3)$ $= (p + 1)[-3(1 - p) + 1]$
 $= (p - 1)(-3p - 2)$
 (h) $a^2 - 10a + 25 = (a - 5)(a - 5)$ (q) $x - x^3 + y - y^3$
 (i) $16b^2 + 56b + 49 = (4b + 7)(4b + 7)$ $= (x + y) - (x^3 + y^3)$
 $= (x + y) - (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
 $= (x + y)(1 - x^2 + xy - y^2)$
 (j) $2a^2 - 12ab + 18b^2 = (2a - 6b)(a - 3b)$ (r) $x^2 - 2x + 1 - y^4$
 $= -4b^2(6b^3 - 1) + 48b^5$ $= x(x - 2) + (1 - y^2)(1 + y^2)$
 $= -4b^2(6b^3 - 1)^2$ $= x(x - 2) + (1 + y)(1 - y)(1 + y^2)$
 (l) $(16 - x^4)$ (s) $4b(x^3 - 1) + x(1 - x^3)$
 $= (4 - x^2)(4 + x^2)$ $= (x^3 - 1)(4b - x)$
 $= (2 - x)(2 + x)(4 + x^2)$ $= (x - 1)(x^2 + x + 1)(4b - x)$
 (m) $7x^2 - 14x + 7xy - 14y$ (t) $3p^3 - \frac{1}{9} = 3(p - \frac{1}{3})(p^2 + \frac{p}{3} + \frac{1}{9})$

$$(u) \quad 8x^6 - 125y^9 = (2x^2 - 5y^3)(4x^4 + 10x^2y^3 + 25y^6)$$

$$(v) \quad (2+p)^3 - 8(p+1)^3 \\ = [(p+2) - 2(p+1)][(p+2)^2 + 2(p+2)(p+1) + 4(p+1)^2]$$

$$= [p+2-2p-2][p^2+4p+4+2p^2+6p+4+4p^2+8p+4] \\ = (-p)(12+18p+7p^2)$$

$$14. (a) \quad (a-2)^2 - a(a+4) \\ = a^2 - 4a + 4 - a^2 - 4a \\ = -8a + 4$$

$$= \frac{1}{a+7} - \frac{a+7}{(a+7)(a-7)} \\ = \frac{-14}{(a+7)(a-7)}$$

$$(b) \quad (5a-4b)(25a^2+20ab+16b^2) \\ = 125a^3 - 64b^3$$

$$(h) \quad \frac{x+2}{2x^3} + 16 \\ = \frac{(x+2) + 16(2x^3)}{2x^3} \\ = \frac{32x^3 + x + 2}{2x^3}$$

$$(c) \quad (2m-3)(4m^2+9)(2m+3) \\ = (4m^2-9)(4m^2+9) \\ = 16m^4 - 81$$

$$(d) \quad (a+2b-c)(a+2b+c) \\ = (a+2b)^2 - c^2 \\ = a^2 + 4ab + 4b^2 - c^2$$

$$(i) \quad \frac{1-2a}{4a^2-1} - \frac{a-1}{2a^2-3a+1} - \frac{1}{1-a} \\ = \frac{1-2a}{(2a-1)(2a+1)} - \frac{a-1}{(2a-1)(2a+1)} + \frac{1}{a-1}$$

$$(e) \quad \frac{p^2-q^2}{p} \div \frac{p+q}{p^2-pq} \\ = \frac{(p-q)(p+q)}{p} \times \frac{p(p-q)}{p+q} \\ = (p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$$

$$= -\frac{(2a-1)}{(2a-1)(2a+1)} - \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{a-1} \\ = \frac{4a-1}{(2a+1)(2a-1)(a-1)}$$

$$(f) \quad \frac{2}{x} + \frac{x}{2} - \frac{2x}{3} \\ = \frac{12+3x^2-4x^2}{6x} \\ = \frac{12-x^2}{6x}$$

$$(j) \quad \frac{x^2+2x}{x^2+x+6} \times \frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2} \\ = \frac{x(x+2)}{x^2+x+6} \times \frac{(x+1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} \\ = \frac{x(x+1)}{x^2+x+6}$$

$$(g) \quad \frac{1}{a+7} - \frac{a+7}{a^2-49}$$

$$15. \quad (2x-1)(2x-1) - (x-3)(x-3) \\ = 4x^2 - 2x - 2x + 1 - (x^2 - 3x - 3x - 9) \\ = 3x^2 + 2x - 8 \\ = (3x-4)(x+2)$$

16. Veronderstal A moet by die uitdrukking getel word om die verlangde resultaat te kry.

$$\therefore (x^2 - x + 4) + A = (x+2)^2 \\ \therefore A = (x+2)(x+2) - (x^2 - x + 4) \\ = x^2 + 2x + 2x + 4 - x^2 + x - 4 \\ = 5x$$

Dus $5x$ moet getel wees.

$$17. \text{ Eerstens, vereenvoudig die uitdrukking: } \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} = x+1$$

Nou vervang die waarde van x in: $7,85 + 1 = 8,85$

$$18. \quad (a-2b)(a^2+2ab+4b^2) = a^3 - 8b^3 \\ \text{so, die uitdrukking is } a^2 + 2ab + 4b^2.$$

$$19. \quad 27x^3 + 1 = (3x+1)(9x^2-3x+1)$$

$$\frac{(3x+1)(9x^2-3x+1)}{9x^2-3x+1} = 3x+1$$

so, die uitdrukking is $9x^2 - 3x + 1$.

Oefening 2 - 1

Oplos van lineêre vergelykings (aanvaar alle nomers is ongelyk nul aan):

1. $2y - 3 = 7$
2. $-3y = 0$
3. $16y + 4 = -10$
4. $12y + 0 = 144$
5. $7 + 5y = 62$
6. $55 = 5x + \frac{3}{4}$
7. $5x = 2x + 45$
8. $23x - 12 = 6 + 3x$
9. $12 - 6x + 34x = 2x - 24 - 64$
10. $6x + 3x = 4 - 5(2x - 3)$
11. $18 - 2p = p + 9$
12. $\frac{4}{p} = \frac{16}{24}$
13. $-(-16 - p) = 13p - 1$
14. $3f - 10 = 10$
15. $3f + 16 = 4f - 10$
16. $10f + 5 = -2f - 3f + 80$
17. $8(f - 4) = 5(f - 4)$
18. $6 = 6(f + 7) + 5f$
19. $(a - 1)^2 - 2a = (a + 3)(a - 2) - 3$
20. $-7x = x + 8(1 - x)$
21. $5 - \frac{7}{b} = \frac{2(b + 4)}{b}$
22. $\frac{x + 2}{4} - \frac{x - 6}{3} = \frac{1}{2}$
23. $3 - \frac{y - 2}{4} = 4$
24. $\frac{a + 1}{a + 2} = \frac{a - 3}{a + 1}$
25. $(x - 3)(x + 2) = x(x - 4)$
26. $1,5x + 3,125 = 1,25x$
27. $\frac{1}{3}P + \frac{1}{2}P - 10 = 0$
28. $1\frac{1}{4}(x - 1) - 1\frac{1}{2}(3x + 2) = 0$
29. $\frac{5}{2a} + \frac{1}{6a} - \frac{3}{a} = 2$
30. $\frac{3}{2x^2} + \frac{4}{3x} - \frac{5}{6x} = 0$

Oplossings vir Oefening 2 - 1

1. $2y - 3 = 7$

$$2y = 10$$

$$y = 5$$

2. $-3y = 0$

$$y = \frac{0}{3}$$

$$y = 0$$

3. $16y + 4 = -10$

$$16y = -14$$

$$y = -\frac{14}{16}$$

$$= \frac{7}{8}$$

4. $12y + 0 = 144$

$$y = \frac{144}{12}$$

$$y = 12$$

5. $7 + 5y = 62$

$$5y = 62 - 7$$

$$5y = 55$$

$$y = 11$$

6. $55 = 5x + \frac{3}{4}$

$$220 = 20x + 3$$

$$20x = 117$$

$$x = \frac{117}{20}$$

7. $5x = 2x + 45$

$$3x = 45$$

$$x = 15$$

8. $23x - 12 = 6 + 3x$

$$20x = 18$$

$$x = \frac{18}{20}$$

$$x = \frac{9}{10}$$

9. $12 - 6x + 34x = 2x - 24 - 64$

$$-6x + 34x - 2x = -24 - 64 - 12$$

$$26x = 100$$

$$x = \frac{100}{26}$$

10. $6x + 3x = 4 - 5(2x - 3)$

$$6x + 3x = 4 - 10x + 15$$

$$19x = 19$$

$$x = 1$$

11. $18 - 2p = p + 9$

$$9 = 3p$$

$$p = 3$$

12. $\frac{4}{p} = \frac{16}{24}$

$$96 = 16p$$

$$p = 6$$

13. $-(-16 - p) = 13p - 1$

$$16 + p = 13p - 1$$

$$17 = 12p$$

$$p = \frac{17}{12}$$

14. $3f - 10 = 10$

$$3f = 20$$

$$f = \frac{20}{3}$$

15. $3f + 16 = 4f - 10$

$$-f = -10 - 16$$

$$f = 26$$

16. $10f + 5 = -2f - 3f + 80$

$$10f + 2f + 3f = 75$$

$$15f = 75$$

$$f = 5$$

17. $8(f - 4) = 5(f - 4)$

$$8f - 32 = 5f - 20$$

$$3f = 12$$

$$f = 4$$

18. $6 = 6(f + 7) + 5f$

$$6 = 6f + 42 + 5f$$

$$-36 = 11f$$

$$f = -\frac{36}{11}$$

19. $(a - 1)^2 - 2a = (a + 3)(a - 2) - 3$

$$a^2 - 2a + 1 - 2a = a^2 - 2a + 3a - 6 - 3$$

$$-4a + 1 = a - 9$$

$$5a = 10$$

$$a = 2$$

20. $-7x = x + 8(1 - x)$

$$-7x = -7x + 8$$

$$0 = 8$$

Geen oplossing

$$21. \quad 5 - \frac{7}{b} = \frac{2(b+4)}{b}$$

$$5b - 7 = 2(b+4)$$

$$5b - 7 = 2b + 8$$

$$3b = 15$$

$$b = 5$$

$$22. \quad \frac{x+2}{4} - \frac{x-6}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3(x+2)}{12} - \frac{4(x-6)}{12} = \frac{6}{12}$$

$$3(x+2) - 4(x-6) = 6$$

$$3x + 6 - 4x + 24 = 6$$

$$-x = -24$$

$$x = 24$$

$$23. \quad 3 - \frac{y-2}{4} = 4$$

$$12 - y - 2 = 16$$

$$-4 = y + 2$$

$$y = -6$$

$$24. \quad \frac{a+1}{a+2} = \frac{a-3}{a+1}$$

$$\frac{a+1}{a+2} - \frac{a-3}{a+1} = 0$$

$$(a+1)^2 - (a-3)(a+2) = 0$$

$$a^2 + 2a + 1 - (a^2 - a - 6) = 0$$

$$a^2 + 2a + 1 - a^2 + a + 6 = 0$$

$$3a + 7 = 0$$

$$a = -\frac{7}{3}$$

$$25. \quad (x-3)(x+2) = x(x-4)$$

$$x^2 - x - 6 = x^2 - 4x$$

$$-x + 4x = 6$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$$26. \quad 1,5x + 3,125 = 1,25x$$

$$1,5x - 1,25x = -3,125$$

$$0,25x = -3,125$$

$$x = -12,5$$

$$27. \quad \frac{1}{3}P + \frac{1}{2}P - 10 = 0$$

$$2p + 3p = 10$$

$$5p = 10$$

$$p = 2$$

$$28. \quad 1\frac{1}{4}(x-1) - 1\frac{1}{2}(3x+2) = 0$$

$$\frac{5}{4}x - \frac{5}{4} - \frac{9}{2}x - 3 = 0$$

$$\frac{5x-8x}{4} = \frac{5+12}{4}$$

$$-13x = 17$$

$$x = -\frac{17}{13}$$

$$29. \quad \frac{5}{2a} + \frac{1}{6a} - \frac{3}{a} = 2$$

$$15 + 1 - 18 = 12a$$

$$-2 = 12a$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

$$30. \quad \frac{3}{2x^2} + \frac{4}{3x} - \frac{5}{6x} = 0$$

$$9 + 8x - 5x = 0$$

$$9 + 3x$$

$$3x = -9$$

$$x = -3$$

Oefening 2 - 2

Los die volgende vergelykings op:

$$1. \quad 9x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$2. \quad 5x^2 - 21x - 54 = 0$$

$$3. \quad 4y^2 - 9 = 0$$

$$4. \quad 4x^2 - 16x - 9 = 0$$

$$5. \quad 4x^2 - 12x = -9$$

$$6. \quad 20m + 25m^2 = 0$$

$$7. \quad 2x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$8. \quad -75x^2 + 290x = 240$$

$$9. \quad 2x = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 14\frac{2}{3}$$

$$10. \quad x^2 - 4x = -4$$

$$11. \quad -x^2 + 4x - 6 = 4x^2 - 5x + 3$$

$$12. \quad t^2 = 3t$$

$$13. \quad x^2 - 10x = -25$$

$$14. \quad x^2 = 18$$

15. $p^2 - 6p = 7$

16. $4x^2 - 17x - 77 = 0$

17. $14x^2 + 5x = 6$

18. $2x^2 - 2x = 12$

19. $\frac{a+1}{3a-4} + \frac{9}{2a+5} + \frac{2a+3}{2a+5} = 0$

20. $\frac{3}{9a^2-3a+1} - \frac{3a+4}{27a^3+1} = \frac{1}{9a^2-1}$

Oplossings vir Oefening 2 - 2

1. $(3x+2)(3x-4) = 0$
 $\therefore x = -\frac{2}{3}$ of $x = \frac{4}{3}$

2. $(5x-9)(x+6) = 0$
 $\therefore x = \frac{9}{5}$ of $x = -6$

3. $(2y+3)(2y-3) = 0$
 $\therefore y = -\frac{3}{2}$ of $y = \frac{3}{2}$

4. $x(2x+1)(2x-9) = 0$
 $\therefore x = -\frac{1}{2}$ of $x = \frac{9}{2}$

5. $(4x)(x-3) = -9$
 $4x^2 - 12x + 9 = 0$
 $(2x-3)(2x-3) = 0$
 $\therefore x = \frac{3}{2}$

6. $20m + 25m^2 = 0$
 $5m(4+5m) = 0$
 $\therefore m = 0$ of $m = -\frac{4}{5}$

7. $2x^2 - 5x - 12 = 0$
 $(2x+3)(x-4) = 0$
 $\therefore x = 4$ of $x = -\frac{3}{2}$

8. $-75x^2 + 290x = 240$
 $-15x^2 + 58x - 48 = 0$
 $(5x-6)(3x-8) = 0$
 $\therefore x = \frac{6}{5}$ of $x = \frac{8}{3}$

9. $2x = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 14\frac{2}{3}$
 $2x = \frac{1}{3}x^2 - 3x + \frac{44}{3}$
 $6x = x^2 - 9x + 44$
 $x^2 - 15x + 44 = 0$
 $(x-4)(x-11) = 0$
 $\therefore x = 4$ of $x = 11$

10. $x^2 - 4x = -4$

$(x-2)(x-2) = 0$
 $\therefore x = 2$

11. $-x^2 + 4x - 6 = 4x^2 - 14x + 3$
 $5x^2 - 18x + 9 = 0$
 $(5x-3)(x-3) = 0$
 $\therefore x = \frac{3}{5}$ of $x = 3$

12. $t^2 = 3t$
 $t(t-3) = 0$
 $\therefore t = 0$ of $t = 3$

13. $x^2 - 10x = -25$
 $x^2 - 10x + 25 = 0$
 $(x-5)(x-5) = 0$
 $\therefore x = 5$

14. $x^2 = 18$
 $\therefore x = \sqrt{18}$ of $x = -\sqrt{18}$

15. $p^2 - 6p = 7$
 $p^2 - 6p - 7 = 0$
 $(p+1)(p-7) = 0$
 $\therefore p = -1$ of $p = 7$

16. $4x^2 - 17x - 77 = 0$
 $(4x+11)(x-7) = 0$
 $\therefore x = 7$ of $x = -\frac{11}{4}$

17. $14x^2 + 5x = 6$
 $14x^2 + 5x - 6 = 0$
 $(7x-3)(2x+2) = 0$
 $\therefore x = \frac{3}{7}$ of $x = -\frac{1}{2}$

18. $2x^2 - 2x = 12$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x-3)(x+2) = 0$
 $\therefore x = -2$ of $x = 3$

19. $\frac{a+1}{3a-4} + \frac{9}{2a+5} + \frac{2a+3}{2a+5} = 0$
 $\frac{(a+1)(2a+5) + 9(3a-4) + (2a+3)(3a-4)}{(3a-4)(2a+5)} = 0$
 $2a^2 + 7a + 5 + 27a - 36 + 6a^2 + a - 12 = 0$
 $8a^2 + 35a - 43 = 0$
 $(8a+43)(a-1) = 0$
 $a = 1$ of $a = -\frac{43}{8} = -5\frac{3}{8}$
20. $\frac{3}{9a^2-3a+1} - \frac{3a+4}{27a^3+1} = \frac{1}{9a^2-1}$
 $\frac{3}{9a^2-3a+1} - \frac{3a+4}{(3a+1)(9a^2-3a+1)} = \frac{1}{(3a-1)(3a+1)}$
 $\frac{3(9a^2-1) - (3a-1)(3a+4)}{(9a^2-3a+1)(3a+1)(3a-1)} = \frac{9a^2-3a+1}{(9a^2-3a+1)(3a+1)(3a-1)}$
 $27a^2 - 3 - 9a^2 - 9a + 4 = 9a^2 - 3a + 1$
 $9a^2 - 6a = 0$
 $3a(3a-2) = 0$
 $a = 0$ of $a = \frac{2}{3}$

Oefening 2 - 3

1. Los vir x en y op:
- (a) $3x - 14y = 0$
 $x - 4y + 1 = 0$
 - (b) $x + y = 8$ en $3x + 2y = 21$
 - (c) $y = 2x + 1$ en $x + 2y + 3 = 0$
 - (d) $\frac{a}{2} + b = 4$ en $\frac{a}{4} - \frac{b}{4} = 1$
 - (e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$ en $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 11$
2. Los grafies op en kontroleer jou antwoord algebraïes:
- (a) $x + 2y = 1$ en $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$
 - (b) $5 = x + y$ en $x = y - 2$
 - (c) $3x - 2y = 0$ en $x - 4y + 1 = 0$
 - (d) $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} - 1$ en $\frac{y}{4} + \frac{x}{2} = 1$
 - (e) $2x + y = 5$ en $3x - 2y = 4$

Oplossings vir Oefening 2 - 3

1. Los algebraïes op:

(a) $3x - 14y = 0$

$$\therefore 3x = 14y$$

$$\therefore x = \frac{14}{3}y$$

Vervang waarde van x in die tweede vergelyking:

$$x - 4y + 1 = 0$$

$$\therefore \frac{14}{3}y - 4y + 1 = 0$$

$$14y - 12y + 3 = 0$$

$$2y = -3$$

$$y = -\frac{3}{2}$$

Vervang waarde van y terug in die eerste vergelyking:

$$\therefore x = \frac{14(-\frac{3}{2})}{3} = -7$$

$$y = -\frac{3}{2} \text{ en } x = -7.$$

(b) $x + y = 8$

$$\therefore x = 8 - y$$

Vervang waarde van x in die tweede vergelyking:

$$3x + 2y = 21$$

$$\therefore 3(8 - y) + 2y = 21$$

$$24 - 3y + 2y = 21$$

$$-y = -3$$

$$y = 3$$

Vervang waarde van y terug in die eerste vergelyking:

$$\therefore x = 8 - 3 = 5$$

$$y = 3 \text{ en } x = 5$$

(c) $y = 2x + 1$

Vervang waarde van y in die tweede vergelyking:

$$x + 2y + 3 = 0$$

$$\therefore x + 2(2x + 1) + 3 = 0$$

$$x + 4x + 2 + 3 = 0$$

$$5x = -5$$

$$\therefore x = -1$$

Vervang waarde van x terug in die eerste vergelyking:

$$\therefore y = 2(-1) + 1 = -1$$

$$y = -1 \text{ en } x = -1$$

(d) $\frac{a}{2} + b = 4$

$$a + 2b = 8$$

$$a - b = 4$$

$$3b = 4$$

$$b = \frac{4}{3}$$

Vervang $b = \frac{4}{3}$ in die eerste vergelyking:

$$\frac{a}{2} + \frac{4}{3} = 4$$

$$\frac{a}{2} = 4 - \frac{4}{3}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{8}{3}$$

$$a = \frac{16}{3}$$

$$a = 5\frac{1}{3} \text{ en } b = 1\frac{1}{3}$$

(e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$

$$y + x = 3xy$$

$$y - x = 11xy$$

$$2y = 14xy$$

$$\frac{2y}{14y} = x$$

$$x = \frac{1}{7}$$

Vervang $x = \frac{1}{7}$ in die eerste vergelyking:

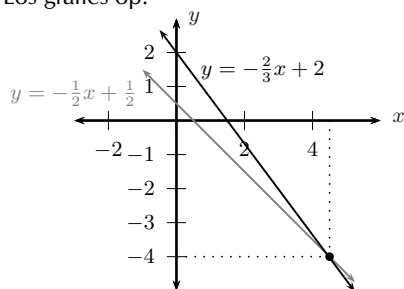
$$7 + \frac{1}{y} = 3$$

$$\frac{1}{y} = -4$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{7} \text{ en } y = -\frac{1}{4}$$

2. (a) Los grafies op:



Om algebraïes te kontroleer:

$$x + 2y = 1$$

$$\therefore x = -2y + 1$$

Vervang waarde van x in die tweede vergelyking:

$$\therefore \frac{-2y+1}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$2(-2y + 1) + 3y = 6$$

$$-4y + 2 + 3y = 6$$

$$\therefore y = -4$$

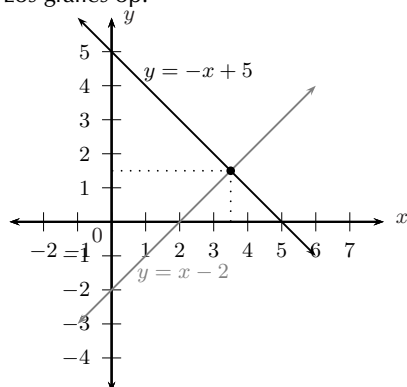
Vervang waarde van y terug in die eerste vergelyking:

$$x + 2(-4) = 1$$

$$x - 8 = 1$$

$$\therefore x = 9$$

(b) Los grafies op:



Om algebraïes te kontroleer:

$$5 = x + y$$

$$\therefore y = 5 - x$$

Vervang waarde van y in die tweede vergelyking:

$$x = 5 - x - 2$$

$$2x = 3$$

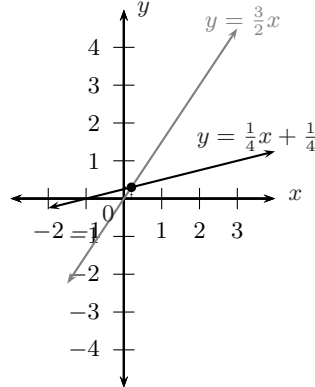
$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

Vervang waarde van x terug in die eerste vergelyking:

$$5 = \frac{3}{2} + y$$

$$y = \frac{10}{2} - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

(c) Los grafies op:



Om algebraïes te kontroleer:

$$3x - 2y = 0$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x$$

Vervang waarde van y in die tweede vergelyking:

$$\therefore x - 4\left(\frac{3}{2}x\right) + 1 = 0$$

$$x - 6x + 1 = 0$$

$$5x = 1$$

$$x = \frac{1}{5}$$

Vervang waarde van x terug in die eerste vergelyking:

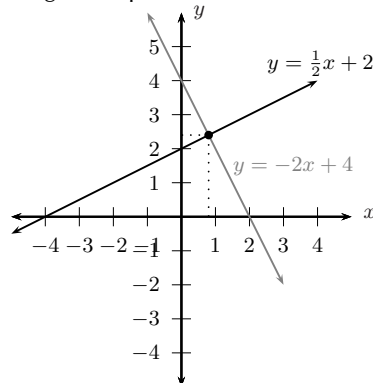
$$3\frac{1}{5} - 2y = 0$$

$$3 - 10y = 0$$

$$10y = 3$$

$$y = \frac{3}{10}$$

(d) Los grafies op:



Om algebraïes te kontroleer:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{2} - 1$$

$$x = 2y - 4$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{y}{4} + \frac{x}{2} = 1$$

$$y + 2x = 4$$

$$y = -2x + 4$$

Vervang $y = \frac{1}{2}x + 2$ in $y = -2x + 4$

$$\frac{1}{2}x + 2 = -2x + 4$$

$$2\frac{1}{2}x = 2$$

$$x = \frac{4}{5}$$

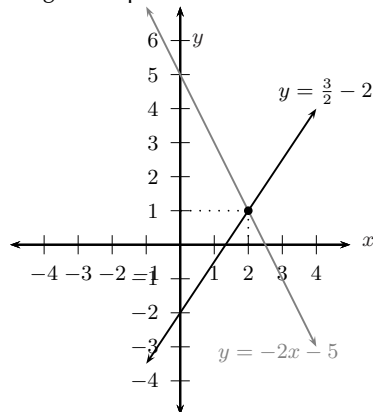
Vervang in $y = -2x + 4$

$$y = -2\frac{4}{5} + 4$$

$$= -\frac{8}{5} + 4$$

$$= 2\frac{2}{5}$$

(e) Los grafies op:



$$y = -2x + 5$$

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

$$0 = -\frac{7}{2}x + 7$$

$$\frac{7}{2}x = 7$$

$$x = 2$$

Vervang $x = 2$ in die eerste vergelyking in:

$$2(2) + y = 5$$

$$y = 1$$

Oefening 2 - 4

1. Twee vliegtuie vlieg na mekaar toe vanaf lughawens 1 200 km van mekaar af. Een vlieg teen 250 km/h en die ander teen 350 km/h. As hulle dieselfde tyd vertrek, hoe lank sal dit hulle neem om by mekaar verby te vlieg?
2. Kadesh het 20 hempde gekoop teen 'n totale bedrag van R 980. As die groot hempde R 50 kos en die klieneres R 40 kos, hoeveel van elke grootte het hy gekoop?
3. Die diagonaal van 'n reghoek is 25 cm meer as die wydte. Die lengte van die reghoek is 17 cm meer as die wydte. Wat is die afmetings van die reghoek?

4. Die som van 27 en 12 is 73 meer as 'n onbekende getal. Vind die onbekende getal.
5. Die twee kleiner hoeke van 'n reghoekige driehoek is in die verhouding 1 : 2. Wat is die groottes van die twee hoeke?
6. Die lengte van 'n reghoek is tweemaal die breedte. As die oppervlakte 128 cm² is, bepaal die lengte en breedte.
7. As 4 keer 'n getal met 6 vermeerder word, is die resultaat 15 minder as die vierkant (kwadraat) van die getal. Vind die getal wat hierdie stelling bevredig deur 'n vergelyking op te stel en dan op te los.
8. Die lengte van 'n reghoek is 2 cm meer as die wydte. Die omtrek van die reghoek is 20 cm. Vind die lengte en breedte van die reghoek.
9. Stefan het 1 l liter van 'n mengsel wat 69% sout bevat. Hoeveel water moet Vian bygooi om die mengsel 50% sout te maak? Skryf jou antwoord as 'n breukdeel van 'n liter.
10. Die som van twee opeenvolgende onewe getalle is 20 en hulle verskil is 2. Vind die twee getalle.
11. Die noemer van 'n breuk is 1 meer as die teller. Die som van die breuk en sy omgekeerde is $\frac{5}{2}$. Vind die breuk.
12. Masindi is 21 jaar ouer as haar dogter, Mulivhu. Die som van hulle ouderdomme is 37. Hoe oud is Mulivhu?
13. Tshamano is nou vyf keer so oud soos sy seun Murunwa. Sewe jaar van nou af sal Tshamano drie keer so oud soos sy seun wees. Vind hulle huidige ouderdomme.

Oplossings vir Oefening 2 - 4

1. Gestel afstand $d_1 = 1\,200 - x$ km $d_2 = x$ km
en spoed $S_1 = 250$ km/h en $S_2 = 350$ km/h.

$$\text{Tyd } t = \frac{\text{Afstand}}{\text{Spoed}}$$

$$\text{Wanneer die vliegtuie by mekaar verby vlieg } \frac{1\,200 - x}{250} = \frac{x}{350}$$

$$350(1\,200 - x) = 250x$$

$$420\,000 - 350x = 250x$$

$$600x = 420\,000$$

$$x = 700 \text{ km}$$

$$\therefore t = \frac{700 \text{ km}}{350 \text{ km/h}}$$

$$= 2 \text{ ure}$$

Dit sal die vliegtuie 2 ure vat of by mekaar verby te vlieg.

2. Laat x die getal groot hempde wees en $20 - x$ die getal klein hempde wees.
Skryf die in 'n tabel formaat uit:

	Nr. hempde	Kos	Totale
Groot	x	50	980
Klien	$20 - x$	40	

$$50x + 40(20 - x) = 980$$

$$50x + 800 - 40x = 980$$

$$10x = 180$$

$$\therefore x = 18$$

koop Kadesh 18 groot hempde en 2 klen hempde.

3. Gestel lengte = l , wydte = w en diagonaal = d .

$$\therefore d = w + 25 \text{ and } l = w + 17.$$

By die stelling van Pythagoras:

$$d^2 = l^2 + w^2$$

$$\therefore w^2 = d^2 - l^2$$

$$= (w + 25)^2 - (w + 17)^2$$

$$= w^2 + 50w + 625 - w^2 - 34w - 289$$

$$\therefore w^2 - 16w - 336 = 0$$

$$(w + 12)(w - 28) = 0$$

$$\therefore w = -12 \text{ or } w = 28$$

Die wydte moet positief wees, dus

wydte $w = 28$ cm

lengte $l = (w + 17) = 45$ cm

en diagonaal $d = (w + 25) = 53$ cm.

4. Gestel die onbekende getal = x

$$\therefore 27 + 12 = x + 73$$

$$39 = x + 73$$

$$x = 39 - 73$$

$$x = -34$$

Die onbekende getal -34 .

5. Laat x = die kleinste hoek. Dus, die ander hoek = $2x$.

Ons is gegee die derde hoek = 90° .

$$x + 2x + 90^\circ = 180^\circ \text{ (som van hoeke in 'n driehoek)}$$

$$\therefore 3x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

Die groottes van die hoeke is 30° en 60° .

6. Lengte $l = 2b$ en $l \times b = 128$ word gegee

$$\therefore 2b \times b = 128$$

$$2b^2 = 128$$

$$b^2 = 64$$

$$b = \pm 8$$

Maar wydte moet positief wees,

due $b = 8$ cm en $l = 2b = 16$ cm.

7. Laat die nommer = x .

Dus is die vergelyking $4x + 6 = x^2 - 15$.

$$\therefore x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(x - 7)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = 7 \text{ of } x = -3$$

8. Laat lengte $l = x$, wydte $w = x - 2$ en omtrek $= p$

$$\therefore p = 2l + 2w$$

$$= 2x + 2(x - 2)$$

$$20 = 2x + 2x - 4$$

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

$$\therefore l = 6 \text{ cm en } w = l - 2 = 4 \text{ cm.}$$

9. Die nuwe volume (x) mengsel moet 50% sout bevat, dus

$$0,69 = 0,5x$$

$$\therefore x = \frac{0,69}{0,5}$$

$$x = 2(0,69) = 1,38$$

Die volume van die nuwe mengsel is 1,38 ℓ

Die hoeveelheid water (y) wat byvoeg moet wees is

$$y = x - 1,00$$

$$= 1,38 - 1,00$$

$$= 0,38$$

Dus 0,38 ℓ water bygevoeg moet word.

Om dit as 'n fraksie van 'n liter te skryf:

$$0,38 = \frac{38}{100}$$

$$= \frac{19}{50} \ell$$

10. Laat die getalle x en y wees.

$$x + y = 20$$

$$x - y = 2$$

$$2x = 22$$

$$x = 11$$

$$11 - y = 2$$

$$y = 9$$

Dus die getalle is 9 en 11

11. Laat die getal x wees.

So die noemer is $x + 1$.

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{5}{2}$$

Los op vir x :

$$2x^2 + 2(x + 1)^2 = 5x(x + 1)$$

$$2x^2 + 2x^2 + 4x + 2 = 5x^2 + 5x$$

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = -1$$

$$x + 1 = 2 \text{ of } x + 1 = -1$$

So die breuke is $\frac{1}{2}$

12. Laat Mulivhu x jaar oud wees.

So Masindi is $x + 21$ jaar oud.

$$x + x + 21 = 37$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

Mulivhu is 8 jaar oud.

13. Laat Murunwa x jaar oud wees.

So Tshamano is $5x$ jaar oud.

Oor 7 jaar sal Murunwa's ouderdom $x + 7$ wees

Tshamano's ouderdom sal $5x + 7$ wees

$$5x + 7 = 3(x + 7)$$

$$5x + 7 = 3x + 21$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

So Murunwa is 7 jaar oud en Tshamano is 35 jaar oud.

Oefening 2 - 5

1. Maak a die onderwerp van die vergelyking: $s = ut + \frac{1}{2}at^2$
2. Los vir n op: $pV = nRT$
3. Maak x die onderwerp van die vergelyking: $\frac{1}{b} + \frac{2b}{x} = 2$
4. Los vir r op: $V = \pi r^2 h$
5. Los vir h op: $E = \frac{hc}{\lambda}$
6. Los vir h op: $A = 2\pi r h + 2\pi r$
7. Maak λ die onderwerp van die vergelyking: $t = \frac{D}{f\lambda}$
8. Los vir m op: $E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$
9. Los vir x op: $x^2 + x(a + b) + ab = 0$
10. Los vir b op: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
11. Maak u die onderwerp van die vergelyking: $\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + \frac{1}{w}$
12. Los vir r op: $A = \pi R^2 - \pi r^2$
13. $F = \frac{9}{5}C + 32^\circ$ is die formule wat temperatuur in grade Celsius omskakel na grade Fahrenheit. Lei 'n formule af om Fahrenheit na Celsius om te skakel.
14. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ is die formule wat die volume van 'n sokkerbal beskryf. Gee die radius in terme van die volume.

Oplossings vir Oefening 2 - 5

$$\begin{aligned} 1. \quad s &= ut + \frac{1}{2}at^2 \\ s - ut &= \frac{1}{2}at^2 \\ 2(s - ut) &= at^2 \\ \therefore a &= \frac{2(s - ut)}{t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad pV &= nRT \\ \therefore n &= \frac{pV}{RT} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{1}{b} + \frac{2b}{x} &= 2 \\ \frac{2b}{x} &= 2 - \frac{1}{b} \\ \frac{2b}{x} &= \frac{2b - 1}{b} \\ \therefore x(2b - 1) &= 2b^2 \\ x &= \frac{2b^2}{2b - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad V\pi r^2 h & \\ r^2 &= \frac{V}{\pi h} \\ \therefore V &= \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad E &= \frac{hc}{\lambda} \\ E\lambda &= hc \\ \therefore h &= \frac{E\lambda}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad A &= 2\pi rh + 2\pi r \\ 2\pi rh &= A - 2\pi r \\ \therefore h &= \frac{A - 2\pi r}{2\pi r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad t &= \frac{D}{f\lambda} \\ ft\lambda &= D \\ \therefore \lambda &= \frac{D}{ft} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad E &= mgh + \frac{1}{2}mV^2 \\ E &= m\left(gh + \frac{1}{2}V^2\right) \\ \therefore m &= \frac{E}{gh + \frac{1}{2}V^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad x^2 + x(a + b) + ab &= 0 \\ (x + a)(x + b) &= 0 \\ x &= -a \text{ or } x = -b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 - a^2 &= b^2 \\ b &= \pm\sqrt{c^2 - a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad \frac{1}{v} &= \frac{1}{u} + \frac{1}{w} \\ uw - uv &= vw \\ u(w - v) &= vw \\ u &= \frac{vw}{w - v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \quad A &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ A &= \pi(R^2 - r^2) \\ \frac{A}{\pi} &= R^2 - r^2 \\ r^2 &= R^2 - \frac{A}{\pi} \\ r &= \pm\sqrt{R^2 - \frac{A}{\pi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \quad F &= \frac{9}{5}C + 32 \\ 5F &= 9C + 160 \\ 9C &= 160 - 5F \\ C &= \frac{160}{9} - \frac{5}{9}F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. \quad V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 3V &= 4\pi r^3 \\ r^3 &= \frac{3V}{4\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \end{aligned}$$

Oefening 2 - 6

Los vir x op en stel die antwoord voor op 'n getallelyn en in intervalnotasie:

1. $3x + 4 > 5x + 8$
2. $3(x - 1) - 2 \leq 6x + 4$
3. $\frac{x-7}{3} > \frac{2x-3}{2}$
4. $-4(x-1) < x+2$
5. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(x-1) \geq \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$
6. $-2 \leq x-1 < 3$
7. $-5 < 2x-3 \leq 7$
8. $7(3x+2) - 5(2x-3) > 7$
9. $\frac{5x-1}{-6} \leq \frac{1-2x}{3}$
10. $3 \leq 4-x \leq 16$
11. $\frac{-7y}{3} - 5 > -7$
12. $1 \leq 1-2y < 9$
13. $-2 < \frac{x-1}{-3} < 7$

Oplossings vir Oefening 2 - 6

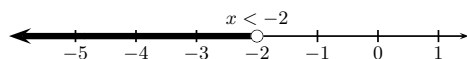
1. $3x + 4 > 5x + 8$

$$3x - 5x > 8 - 4$$

$$-2x > 4$$

$$2x < -4$$

$$x < -2$$



2. $3(x - 1) - 2 \leq 6x + 4$

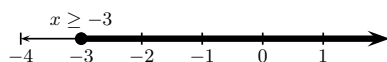
$$3x - 3 - 2 \leq 6x + 4$$

$$3x - 6x \leq 4 + 5$$

$$-3x \leq 9$$

$$3x \geq -9$$

$$x \geq -3$$



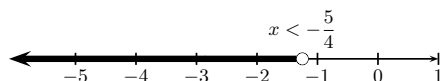
3. $\frac{x-7}{3} > \frac{2x-3}{2}$

$$2(x-7) > 3(2x-3)$$

$$2x - 14 > 6x - 9$$

$$-4x > 5$$

$$x < -\frac{5}{4}$$

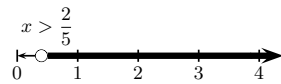


4. $-4(x - 1) < x + 2$

$$-4x + 4 < x + 2$$

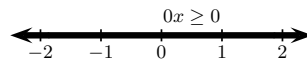
$$-5x < -2$$

$$x > \frac{2}{5}$$

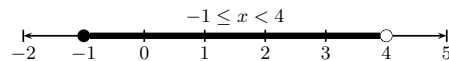


$$\begin{aligned} 5. \quad & \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(x-1) \geq \frac{5}{6}x - \frac{1}{3} \\ & 3x + 2(x-1) \geq 5x - 2 \\ & 3x + 2x - 2 \geq 5x - 2 \\ & 5x - 5x \geq 2 - 2 \\ & 0x \geq 0 \end{aligned}$$

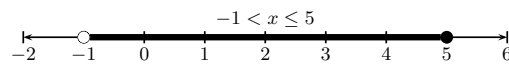
This is true for all real values of x .



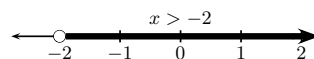
$$\begin{aligned} 6. \quad & -2 \leq x - 1 < 3 \\ & -2 + 1 \leq x - 1 + 1 < 3 + 1 \\ & -1 \leq x < 4 \end{aligned}$$



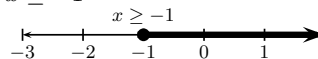
$$\begin{aligned} 7. \quad & -5 < 2x - 3 \leq 7 - 5 + 3 < 2x - 3 \leq 7 + 3 \\ & -2 < 2x \leq 10 \\ & -1 < x \leq 5 \end{aligned}$$



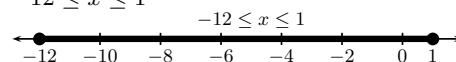
$$\begin{aligned} 8. \quad & 7(3x+2) - 5(2x-3) > 7 \\ & 21x + 14 - 10x + 15 > 7 \\ & 11x > 7 - 14 - 15 \\ & 11x > -22 \\ & x > -2 \end{aligned}$$



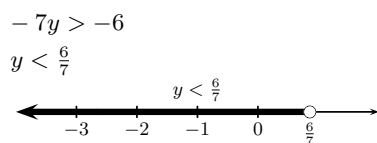
$$\begin{aligned} 9. \quad & \frac{5x-1}{-6} \leq \frac{1-2x}{3} \\ & 5x - 1 \geq -2(1-2x) \\ & 5x - 1 \geq -2 + 4x \\ & 5x - 4x \geq -1 \\ & x \geq -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 10. \quad & 3 \leq 4 - x \leq 16 \\ & -1 \leq -x \leq 12 \\ & 1 \geq x \geq -12 \\ & -12 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 11. \quad & \frac{-7y}{3} - 5 > -7 \\ & -7y - 15 > -21 \end{aligned}$$

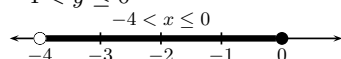


12. $1 \leq 1 - 2y < 9$

$$0 \leq -2y < 8$$

$$0 \geq y > -4$$

$$-4 < y \leq 0$$

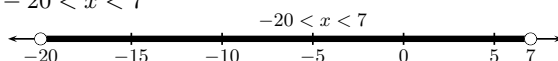


13. $-2 < \frac{x-1}{-3} < 7$

$$6 > x - 1 > -21$$

$$7 > x > -20$$

$$-20 < x < 7$$



Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Los op:

(a) $2(p - 1) = 3(p + 2)$

(j) $y^2 + y = 6$

(b) $3 - 6k = 2k - 1$

(k) $0 = 2x^2 - 5x - 18$

(c) $m + 6(-m + 1) + 5m = 0$

(l) $(d+4)(d-3) - d = (3d-2)^2 - 8d(d-1)$

(d) $2k + 3 = 2 - 3(k + 3)$

(m) $5x + 2 \leq 4(2x - 1)$

(e) $5t - 1 = t^2 - (t + 2)(t - 2)$

(n) $\frac{4x - 2}{6} > 2x + 1$

(f) $3 + \frac{q}{5} = \frac{q}{2}$

(o) $\frac{x}{3} - 14 > 14 - \frac{x}{7}$

(g) $5 - \frac{2(m+4)}{m} = \frac{7}{m}$

(p) $\frac{1-a}{2} - \frac{2-a}{3} \geq 1$

(h) $\frac{2}{t} - 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{t} \right)$

(q) $-5 \leq 2k + 1 < 5$

(i) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(r) $x - 1 = \frac{42}{x}$

2. Beskou die volgende lettervergelykings:

(a) Los vir I op: $P = VI$

(b) Maak m die onderwerp van die vergelyking: $E = mc^2$

(c) Los vir t op: $v = u + at$

(d) Maak f die onderwerp van die vergelyking: $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$

(e) Maak C die onderwerp van die vergelyking: $F = \frac{9}{5}C + 32$

(f) Los vir y op: $m = \frac{y - c}{x}$

3. Los die volgende stelsels gelyktydige vergelykings algebraïes en grafies op:

- (a) $7x + 3y = 13$ en $2x - 3y = -4$ (c) $7x - 41 = 3y$ en $17 = 3x - y$
 (b) $10 = 2x + y$ en $y = x - 2$ (d) $2y = x + 8$ en $4y = 2x - 44$

4. Vind die oplossings van die volgende probleme:

- (a) $\frac{7}{8}$ van 'n getal is 5 meer as $\frac{1}{3}$ van die getal. Vind die getal.
 (b) Drie liniale en twee penne kos saam R 21,00. Een liniaal en een pen kos saam R 8,00. Hoeveel kos 'n pen op sy eie en hoeveel kos 'n liniaal op sy eie?
 (c) 'n Man hardloop na die busstop en terug in 15 minutes. Sy spoed na die busstop is 5 km/h en sy spoed terug is 4 km/h. Wat is die afstand na die busstop?
 (d) Zanele en Piet rolskaats na mekaar toe op 'n reguit pad. Hulle begin 20 km van mekaar af. Zanele skaats teen 15 km/h en Piet teen 10 km/h. Hoe ver sal Piet skaats voor dat hulle by mekaar uitkom?
 (e) As die prys van sjokolade met R 10 verhoog word, kan ons 5 minder sjokolades koop vir R 300. Wat was die prys van sjokolade voor die prys-verhoging?

Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge

1. (a) $2(p - 1) = 3(p + 2)$
 $2p - 2 = 3p + 6$
 $-p = 8$
 $\therefore p = -8$
- (b) $3 - 6k = 2k - 1$
 $-8k = -4$
 $\therefore k = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$
- (c) $m + 6(-m + 1) + 5m = 0$
 $m - 6m + 6 + 5m = 0$
 $0m = -6$
 Geen oplossing
- (d) $2k + 3 = 2 - 3(k + 3)$
 $2k + 3 = 2 - 3k - 9$
 $5k = -10$
 $\therefore k = \frac{-10}{5} = -2$
- (e) $5t - 1 = t^2 - (t + 2)(t - 2)$
 $= 5t - 1 = t^2 - t^2 + 4$
 $5t = 5$
 $t = 1$
- (f) $3 + \frac{q}{5} = \frac{q}{2}$
 $30q + 2q = 5q$
- $3q = 30$
 $q = 10$
- (g) $5 - \frac{2(m+4)}{m} = \frac{7}{m}$
 $5m - 2m - 8 = 7$
 $3m = 15$
 $m = 5$
- (h) $\frac{2}{t} - 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{t}\right)$
 $\frac{2}{t} - 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{t}$
 $\frac{2}{t} - \frac{1}{t} = 1 + 2$
 $\frac{1}{t} = 3$
 $\therefore t = \frac{1}{3}$
- (i) $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x - 2)(x - 1) = 0$
 $\therefore x = 2$ of $x = 1$
- (j) $y^2 + y = 6$
 $y^2 + y - 6 = 0$
 $(y + 3)(y - 2) = 0$
 $\therefore y = -3$ of $y = 2$
- (k) $0 = 2x^2 - 5x - 18$
 $(2x + 9)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -\frac{9}{2}$ of $x = 2$
- (l) $(d + 4)(d - 3) - d = (3d - 2)^2 - 8d(d - 1)$

$$d^2 + d - 12 - d = 9d^2 - 12d + 4 -$$

$$8d^2 + 8d$$

$$d^2 - 12 = d^2 - 4d + 4$$

$$4d = 16$$

$$\therefore d = 4$$

$$(m) \quad 5x + 2 \leq 4(2x - 1)$$

$$5x - 8x \leq -4 - 2$$

$$-3x \leq -6$$

$$\therefore x \geq 2$$

$$(n) \quad \frac{4x - 2}{6} > 2x + 1$$

$$4x - 2 > 12x + 6$$

$$4x - 12x > 6 + 2$$

$$-8x > 8$$

$$\therefore x < -1$$

$$(o) \quad \frac{x}{3} - 14 > 14 - \frac{x}{7}$$

$$7x - 294 > 294 - 3x$$

$$10x > 588$$

$$\therefore x > \frac{588}{10}$$

$$(p) \quad \frac{1-a}{2} - \frac{2-a}{3} \geq 1$$

$$\frac{1-a}{2} - \frac{(2+a)}{3} \geq 1$$

$$3 - 3a - 4 - 2a \geq 6$$

$$-5a \geq 7$$

$$\therefore a \leq -\frac{7}{5}$$

$$(q) \quad -5 \leq 2k + 1 < 5$$

$$-6 \leq 2k < 4$$

$$\therefore -3 \leq k < 2$$

$$(r) \quad x - 1 = \frac{42}{x}$$

$$\text{Let op: } x \neq 0.$$

$$x^2 - x = 42$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$(x - 7)(x + 6) = 0$$

$$\therefore x = 7 \text{ of } x = -6$$

$$2. (a) \quad P = VI$$

$$\therefore I = \frac{P}{V}$$

$$(b) \quad E = mc^2$$

$$\therefore m = \frac{e}{c^2}$$

$$(c) \quad v = u + at$$

$$\therefore t = \frac{v - u}{a}$$

$$(d) \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{v + u}{uv} = \frac{1}{f}$$

$$f(v + u) = uv$$

$$\therefore f = \frac{uv}{u + v}$$

$$(e) \quad F = \frac{9}{5}C + 32$$

$$\therefore C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$(f) \quad m = \frac{y - c}{x}$$

$$\therefore y = mx + c$$

$$3. (a) \quad 7x + 3y = 13 \text{ en } 2x - 3y = -4$$

Tel die twee vergelykings by mekaar om vir x op te los:

$$7x + 3y = 13$$

$$+ \quad 2x - 3y = -4$$

$$9x + 0 = 9$$

$$\therefore x = 1$$

Vervang waarde van x in tweede vergelyking:

$$2(1) - 3y = -4$$

$$-3y = -6$$

$$y = 2$$

$$(b) \quad 10 = 2x + y \text{ en } y = x - 2$$

Vervang waarde van y in eerste vergelyking:

$$10 = 2x + (x - 2)$$

$$3x = 12$$

$$\therefore x = 4$$

Vervang waarde van x in tweede vergelyking:

$$y = 4 - 2$$

$$= 2$$

(c) $7x - 41 = 3y$ en $17 = 3x - y$

$$17 = 3x - y$$

$$\therefore y = 3x - 17$$

Vervang waarde van y in eerste vergelyking:

$$7x - 41 = 3(3x - 17)$$

$$7x - 41 = 9x - 51$$

$$2x = 10$$

$$\therefore x = 5$$

Vervang waarde van x in tweede vergelyking:

$$y = 3(5) - 17$$

$$= -2$$

(d) $2y = x + 8$ en $4y = 2x - 44$

$$2y = x + 8$$

$$\therefore x = 2y - 8$$

Vervang waarde van x in tweede vergelyking:

$$4y = 2(2y - 8) - 44$$

$$4y = 4y - 16 - 44$$

$$\therefore 0y = -60$$

Geen oplossing

($y_1 = \frac{1}{2}x - 11$ en $y_2 = \frac{1}{2}x + 4$. Hierdie lyne het dieselfde gradiënt dus is hulle ewewydig en nooit by mekaar sal sny nie - dus is daar geen oplossing.)

4. (a) Laat x bdie getal wees.

$$\therefore \frac{7}{8}x = \frac{1}{3}x + 5$$

$$21x = 8x + 120$$

$$13x = 120$$

$$x = \frac{120}{13}$$

(b) Laat die prys van liniale x wees en die prys penne y wees

$$\therefore 3x + 2y = 21 \text{ en } x + y = 8$$

Van die tweede vergelyking: $x = 8 - y$

Vervang die waarde van x in die eerste vergelyking:

$$3(8 - y) + 2y = 21$$

$$24 - 3y + 2y = 21$$

$$-y = -3$$

$$\therefore y = 3$$

Vervang die waarde van y in die tweede vergelyking:

$$x + 3 = 8$$

$$\therefore x = 5$$

Due kos elke liniaal R 5 en elke pen R 3.

(c) Laat die afstand na die busstop x wees.

$$\text{Spoed } s_1 = 5 \text{ km/h en } s_2 = 4 \text{ km/h}$$

$$\text{Afstand} = \text{spoed} \times \text{tyd} = s \times t$$

$$\therefore x = 5 \times t_1 = 4 \times t_2$$

$$t_1 + t_2 = 15 \text{ minute} = 0,25 \text{ ure}$$

$$t_1 = \frac{x}{5} \text{ en } t_2 = \frac{x}{4}$$

$$\therefore \frac{x}{5} + \frac{x}{4} = 0,25$$

$$4x + 5x = 0,25 \times 20$$

$$9x = 5$$

$$\therefore x = \frac{5}{9} \text{ km}$$

Die busstop is $\frac{5}{9}$ km of 0,56 km weg.

- (d) Laat die afstand wat Zanele skaats x wees en die afstand wat Piet skaats $20 - x$ wees.

Vul die data in 'n tabel in:

	Spoed	Afstand	Tyd
Zanele	15	x	$\frac{x}{15}$
Piet	$20 - x$	$20 - x$	$\frac{20-x}{10}$

$$\frac{x}{15} = \frac{20-x}{10}$$

$$10x = 15(20 - x)$$

$$10x = 300 - 15x$$

$$25x = 300$$

$$\therefore x = 12$$

$$\therefore y = 20 - 12 = 8$$

Zanele sal 12 km geskaats het en Piet sal 8 km geskaats het wanneer hulle mekaar ontmoet.

- (e) Laat die oorspronklike prys sjokolade x wees.

Nuwe prys $\times$ nommer van sjokolades = 300

$$\therefore (x + 10)\left(\frac{300}{x} - 5\right) = 300$$

$$300 - 5x + \frac{3000}{x} - 50 = 300$$

$$-5x + \frac{3000}{x} - 50 = 0$$

$$-5x^2 + 3000 - 50x = 0$$

$$x^2 + 10x - 600 = 0$$

$$(x - 20)(x + 30) = 0$$

$$\therefore x = 20 \text{ of } x = -30$$

Prys moet positief wees $\therefore x = 20$.

Dus was die prys van sjokolade voor die prys-verhoging R 20.

Oefening 3 - 1

Vereenvoudig sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

1. 16^0

2. $16a^0$

3. $\frac{2^{-2}}{3^2}$

4. $\frac{5}{2^{-3}}$

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

6. x^2x^{3t+1}

7. $3 \times 3^{2a} \times 3^2$

8. $\frac{a^{3x}}{a^x}$

9. $\frac{32p^2}{4p^8}$

10. $(2t^4)^3$

11. $(3^{n+3})^2$

12. $\frac{3^n 9^{n-3}}{27^{n-1}}$

Oplossings vir Oefening 3 - 1

1. 1

2. $16a^0$
 $= 16(1)$
 $= 16$

3. $\frac{2^{-2}}{3^2}$
 $= \frac{1}{2^2 \cdot 3^2}$
 $= \frac{1}{4 \times 9}$
 $= \frac{1}{36}$

4. $\frac{5}{2^{-3}}$
 $= (5)(2^3)$
 $= (5)(8)$
 $= 40$

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$
 $= \frac{2^{-3}}{3^{-3}}$
 $= \frac{3^3}{2^3}$
 $= \frac{27}{8}$

6. x^2x^{3t+1}
 $= x^2 \cdot x^{3t} \cdot x^1$
 $= x^{2+1} \cdot x^{3t}$
 $= x^3x^{3t}$

7. $3 \times 3^{2a} \times 3^2$
 $= 3^{1+2a+2}$
 $= 3^{2a+3}$

8. $\frac{a^{3x}}{a^x}$

$$\begin{aligned}
 &= a^{3x} \cdot a^{-x} \\
 &= a^{3x-x} \\
 &= a^{2x} \\
 9. &\frac{32p^2}{4p^8} \\
 &= 8p^{2-8} \\
 &= 8p^{-6} \\
 &= \frac{8}{p^6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. &(2t^4)^3 \\
 &= 2^3 \cdot t^{4 \cdot 3} \\
 &= 8t^{12}
 \end{aligned}$$

$$11. (3^{n+3})^2$$

$$= 3^{2n+6}$$

$$\begin{aligned}
 12. &\frac{3^n 9^{n-3}}{27^{n-1}} \\
 &= \frac{3^n \cdot (3^2)^{n-3}}{(3^3)^{n-1}} \\
 &= \frac{3^n \cdot 3^{2n-6}}{3^{3n-3}} \\
 &= 3^{n+2n-6-(3n-3)} \\
 &= 3^{3n-6-3n+3} \\
 &= 3^{-3} \\
 &= \frac{1}{3^3} \\
 &= \frac{1}{27}
 \end{aligned}$$

Oefening 3 - 2

Vereenvoudig sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

$$1. t^{\frac{1}{4}} \times 3t^{\frac{7}{4}}$$

$$3. (0,25)^{\frac{1}{2}}$$

$$2. \frac{16x^2}{(4x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$4. (27)^{-\frac{1}{3}}$$

$$5. (3p^2)^{\frac{1}{2}} \times (3p^4)^{\frac{1}{2}}$$

Oplossings vir Oefening 3 - 2

$$\begin{aligned}
 1. &t^{\frac{1}{4}} \times 3t^{\frac{7}{4}} \\
 &= 3t^{(\frac{1}{4} + \frac{7}{4})} \\
 &= 3t^{\frac{8}{4}} \\
 &= 3t^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^3 x \\
 &= 8x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. &\frac{16x^2}{(4x^2)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{16x^2}{4^{\frac{1}{2}} x^{2 \cdot \frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{4^2 x^2}{4^{\frac{1}{2}} x} \\
 &= 4^{2-\frac{1}{2}} \cdot x^{2-1} \\
 &= 4^{\frac{3}{2}} \cdot x \\
 &= (2^2)^{\frac{3}{2}} x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. &(0,25)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (2^{-2})^{\frac{1}{2}} \\
 &= 2^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. &(27)^{-\frac{1}{3}} \\
 &= (3^3)^{-\frac{1}{3}} \\
 &= 3^{-1} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad (3p^2)^{\frac{1}{2}} \times (3p^4)^{\frac{1}{2}} &= 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \times p^{1+2} \\
 &= 3^{\frac{1}{2}} p \times 3^{\frac{1}{2}} p^2 \\
 &= 3p^3
 \end{aligned}$$

Oefening 3 - 3

1. Los op:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| (a) $2^{x+5} = 32$ | (h) $2^t + 2^{t+2} = 40$ |
| (b) $5^{2x+2} = \frac{1}{125}$ | (i) $2 \times 5^{2-x} = 5 + 5^x$ |
| (c) $64^{y+1} = 16^{2y+5}$ | (j) $9^m + 3^{3-2m} = 28$ |
| (d) $3^{9x-2} = 27$ | (k) $y - 2y^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$ |
| (e) $81^{k+2} = 27^{k+4}$ | (l) $4^{x+3} = 0,5$ |
| (f) $25^{(1-2x)} - 5^4 = 0$ | (m) $2^a = 0,125$ |
| (g) $27^x \times 9^{x-2} = 1$ | (n) $10^x = 0,001$ |
| | (o) $2^{x^2-2x-3} = 1$ |

2. Die groei van alge kan gemodelleer word met die funksie $f(t) = 2^t$. Vind die waarde van t as $f(t) = 128$.

Oplossings vir Oefening 3 - 3

- | | |
|---|---|
| 1. (a) $2^{x+5} = 32$
$2^{x+5} = 2^5$
$x + 5 = 5$
$x = 0$ | $6y + 6 = 8y + 20$
$6y - 8y = 20 - 6$
$-2y = 14$
$y = -7$ |
| (b) $5^{2x+2} = \frac{1}{125}$
$5^{2x+2} = \frac{1}{5^3}$
$5^{2x+2} = 5^{-3}$
$2x + 2 = -3$
$2x = -5$
$x = -\frac{5}{2}$ | (d) $3^{9x-2} = 27$
$3^{9x-2} = 3^3$
$9x - 2 = 3$
$9x = 5$
$x = \frac{5}{9}$ |
| (c) $64^{y+1} = 16^{2y+5}$
$2^{6(y+1)} = 2^{4(2y+5)}$
$2^{6y+6} = 2^{8y+20}$ | (e) $81^{k+2} = 27^{(k+4)}$
$3^{4(k+2)} = 3^{3(k+4)}$
$3^{4k+8} = 3^{3k+12}$
$4k + 8 = 3k + 12$
$4k - 3k = 12 - 8$
$k = 4$ |

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad & 25^{(1-2x)} - 5^4 = 0 \\ & 5^{2(1-2x)} = 5^4 \\ & 2(1-2x) = 4 \\ & 1-2x = 2 \\ & -2x = 1 \\ & x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(g)} \quad & 27^x \times 9^{x-2} = 1 \\ & 3^{3x} \times 3^{2(x-2)} = 1 \\ & 3^{3x+2(x-2)} = 3^0 \\ & 3x+2x-4 = 0 \\ & 5x-4 = 0 \\ & 5x = 4 \\ & x = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(h)} \quad & 2^t + 2^{t+2} = 40 \\ & 2^t + 2^t \cdot 2^2 = 40 \\ & 2^t(1+2^2) = 40 \\ & 2^t(1+4) = 40 \\ & 2^t = \frac{40}{(1+4)} \\ & 2^t = \frac{40}{5} \\ & 2^t = 8 \\ & 2^t = 2^3 \\ & t = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 2.5^{2-x} = 5 + 5^x \\ & 2.5^2 \cdot 5^{-x} = 5 + 5^x \\ & \frac{2.5^2}{5^x} - 5 - 5^x = 0 \\ & \left(\frac{50}{5^x}\right) \times 5^x - 5 \times (5^x) - 5^x \times (5^x) = 0 \\ & 50 - 5.5^x - (5^x)^2 = 0 \\ & (5^x)^2 + 5.5^x - 50 = 0 \\ & (5^x - 5)(5^x + 10) = 0 \\ & 5^x - 5 = 0 \text{ of } 5^x + 10 = 0 \\ & 5^x = 5 \text{ of } 5^x = -10 \\ & \text{as } 5^x = -10 : \text{ geen oplossing} \\ & \text{as } 5^x = 5 : \\ & 5^x = 5^1 \\ & x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(j)} \quad & 9^m + 3^{3-2m} = 28 \\ & 3^{2m} + 3^3 \cdot 3^{-2m} = 28 \\ & 3^{2m} + \frac{27}{3^{2m}} - 28 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (3^{2m})^2 - 28(3^{2m}) + 27 = 0 \\ & (3^{2m} - 27)(3^{2m} - 1) = 0 \\ & 3^{2m} - 27 = 0 \text{ of } 3^{2m} - 1 = 0 \\ & 3^{2m} = 27 \text{ of } 3^{2m} = 1 \\ & \text{as } 3^{2m} = 27 \\ & 3^{2m} = 3^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2m = 3 \\ & m = \frac{3}{2} \\ & \text{as } 3^{2m} = 1 \\ & 3^{2m} = 3^0 \\ & 2m = 0 \\ & m = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(k)} \quad & y - 2y^{\frac{1}{2}} + 1 = 0 \\ & (y^{\frac{1}{2}} - 1)(y^{\frac{1}{2}} - 1) = 0 \\ & y^{\frac{1}{2}} - 1 = 0 \\ & y^{\frac{1}{2}} = 1 \\ & y^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} \\ & y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(l)} \quad & 4^{x+3} = 0,5 \\ & 2^{2x+6} = 2^{-1} \\ & 2x+6 = -1 \\ & 2x = -7 \\ & x = -3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(m)} \quad & 2^a = 0,125 \\ & 2^a = \frac{125}{1000} \\ & 2^a = \frac{1}{8} \\ & 2^a = \frac{1}{2^3} \\ & 2^a = 2^{-3} \\ & a = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(n)} \quad & 10^x = 0,001 \\ & 10^x = \frac{1}{1000} \\ & = \frac{1}{10^3} \\ & = 10^{-3} \\ & x = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(o)} \quad & 2^{x^2-2x-3} = 1 \\ & 2^{x^2-2x-3} = 2^0 \\ & x^2 - 2x - 3 = 0 \\ & (x-3)(x+1) = 0 \\ & x = 3 \text{ of } x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 2^t = 128 \\ & 2^t = 2^7 \\ & t = 7 \end{aligned}$$

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Vereenvoudig:

(a) $t^3 \times 2t^0$

(b) $5^{2x+y} 5^{3(x+z)}$

(c) $(b^{k+1})^k$

(d) $\frac{6^{5p}}{9^p}$

(e) $m^{-2t} \times (3m^t)^3$

(f) $\frac{3x^{-3}}{(3x)^2}$

(g) $\frac{5^{b-3}}{5^{b+1}}$

(h) $\frac{2^{a-2} 3^{a+3}}{6^a}$

(i) $\frac{3^n 9^{n-3}}{27^{n-1}}$

(j) $\left(\frac{2x^{2a}}{y^{-b}}\right)^3$

(k) $\frac{2^{3x-1} 8^{x+1}}{4^{2x-2}}$

(l) $\frac{6^{2x} 11^{2x}}{22^{2x-1} 3^{2x}}$

(m) $\frac{(-3)^{-3} (-3)^2}{(-3)^{-4}}$

(n) $(3^{-1} + 2^{-1})^{-1}$

(o) $\frac{9^{n-1} 27^{3-2n}}{81^{2-n}}$

(p) $\frac{2^{3n+2} 8^{n-3}}{4^{3n-2}}$

(q) $\frac{3^{t+3} + 3^t}{2 \times 3^t}$

(r) $\frac{2^{3p} + 1}{2^p + 1}$

2. Los op:

(a) $3^x = \frac{1}{27}$

(b) $5^{t-1} = 1$

(c) $2 \times 7^{3x} = 98$

(d) $2^{m+1} = (0,5)^{m-2}$

(e) $3^{y+1} = 5^{y+1}$

(f) $z^{\frac{3}{2}} = 64$

(g) $16x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$

(h) $m^0 + m^{-1} = 0$

(i) $t^{\frac{1}{2}} - 3t^{\frac{1}{4}} + 2 = 0$

(j) $3^p + 3^p + 3^p = 27$

(k) $k^{-1} - 7k^{-\frac{1}{2}} - 18 = 0$

(l) $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 18 = 0$

Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge

1. (a) $t^3 \times 2t^0$
 $= t^3 \times 2(1)$
 $= 2t^3$

(b) $5^{2x+y} \times 5^{3(x+z)}$
 $= 5^{2x+y+3x+3z}$
 $= 5^{5x+y+3z}$

$$(c) \quad (b^{k+1})^k = b^{k^2+k}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad & \frac{6^{5p}}{9^p} \\ &= \frac{2^{5p} \times 3^{5p}}{3^{2p}} \\ &= 2^{5p} \times 3^{5p-2p} \\ &= 2^{5p} \times 3^{3p} \\ &= (2^5 \times 3^3)^p \\ &= (32 \times 27)^p \\ &= 864^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e) \quad & m^{-2t} \times (3m^t)^3 \\ &= m^{-2t} \times 3^3 m^{3t} \\ &= m^{-2t+3t} \times 27 \\ &= 27m^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f) \quad & \frac{3x^{-3}}{(3x)^2} \\ &= 3^{1-2} \times x^{-3-2} \\ &= 3^{-1} \times x^{-5} \\ &= \frac{1}{3x^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g) \quad & \frac{5^{b-3}}{5^{b+1}} \\ &= 5^{b-3-b-1} \\ &= 5^{-4} \\ &= \frac{1}{5^4} \\ &= \frac{1}{625} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h) \quad & \frac{2^{a-2} 3^{a+3}}{6^a} \\ &= \frac{2^{a-2} \times 3^{a+3}}{(2 \times 3)^a} \\ &= \frac{2^{a-2} \times 3^{a+3}}{2^a \times 3^a} \\ &= 2^{a-2-a} \times 3^{a+3-a} \\ &= 2^{-2} \times 3^3 \\ &= \frac{3^3}{2^2} \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{3^n 9^{n-3}}{27^{n-1}} \\ &= \frac{3^n \times (3^2)^{n-3}}{(3^3)^{n-1}} \\ &= \frac{3^n \times 3^{2n-6}}{3^{3n-3}} \\ &= 3^{n+2n-6-(3n-3)} \\ &= 3^{3n-6-3n+3} \\ &= 3^{-3} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3^3}$$

$$= \frac{1}{27}$$

$$\begin{aligned} (j) \quad & \left(\frac{2x^{2a}}{y^{-b}} \right)^3 \\ &= \frac{2^3 (x^{2a})^3}{(y^{-b})^3} \\ &= \frac{2^3 x^{6a}}{y^{-3b}} \\ &= 2^3 x^{6a} y^{3b} \\ &= 8x^{6a} y^{3b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (k) \quad & \frac{2^{3x-1} 8^{x+1}}{4^{2x-2}} \\ &= \frac{2^{3x-1} \times 2^{3(x+1)}}{2^{2(2x-2)}} \\ &= 2^{3x-1+3x+3-4x+4} \\ &= 2^{2x+6} \\ &= 4^{x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l) \quad & \frac{6^{2x} 11^{2x}}{22^{2x-1} 3^{2x}} \\ &= \frac{(3 \times 2)^{2x} \times 11^{2x}}{(2 \times 11)^{2x-1} \times 3^{2x}} \\ &= \frac{3^{2x} \times 2^{2x} \times 11^{2x}}{2^{2x-1} \times 11^{2x-1} \times 3^{2x}} \\ &= 3^{2x-2x} \times 2^{2x-2x+1} \times 11^{2x-2x+1} \\ &= 3^0 \times 2^1 \times 11^1 \\ &= 1 \times 2 \times 11 \\ &= 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m) \quad & \frac{(-3)^{-3} (-3)^2}{(-3)^{-4}} \\ &= (-3)^{-3+2+4} \\ &= (-3)^3 \\ &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n) \quad & (3^{-1} + 2^{-1})^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{5}{6} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{5^{-1}}{6^{-1}} \right) \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$(o) \quad \frac{9^{n-1} 27^{3-2n}}{81^{2-n}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3^{2(n-1)} \times 3^{3(3-2n)}}{3^{4(2-n)}} \\
 &= 3^{2(n-1)+3(3-2n)-4(2-n)} \\
 &= 3^{2n-2+9-6n-8+4n} \\
 &= 3^{-1} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(p)} \quad &\frac{2^{3n+2} 8^{n-3}}{4^{3n-2}} \\
 &= \frac{2^{3n+2} \times 2^{3(n-3)}}{2^{2(3n-2)}} \\
 &= 2^{3n+2+3(n-3)-2(3n-2)} \\
 &= 2^{3n+2+3n-9-6n+4} \\
 &= 2^{-3} \\
 &= \frac{1}{2^3} \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$2. \text{ (a)} \quad 3^x = \frac{1}{27}$$

$$3^x = \frac{1}{3^3}$$

$$3^x = 3^{-3}$$

$$x = -3$$

$$\text{(b)} \quad 5^{t-1} = 1$$

$$5^{t-1} = 5^0$$

$$t-1 = 0$$

$$t = 1$$

$$\text{(c)} \quad 2 \times 7^{3x} = 98$$

$$7^{3x} = 49$$

$$7^{3x} = 7^2$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\text{(d)} \quad 2^{m+1} = (0,5)^{m-2}$$

$$2^{m+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}$$

$$2^{m+1} = (2^{-1})^{m-2}$$

$$2^{m+1} = (2)^{2-m}$$

$$m+1 = 2-m$$

$$2m = 1$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$\text{(e)} \quad 3^{y+1} = 5^{y+1}$$

$$y+1 = 0$$

$$y = -1$$

$$\text{(f)} \quad z^{\frac{3}{2}} = 64$$

$$z^{\frac{3}{2}} = 4^3$$

$$\left(z^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = (4^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$z = 4^2$$

$$\text{(q)} \quad \frac{3^{t+3} + 3^t}{2 \times 3^t}$$

$$= \frac{3^t \times 3^3 + 3^t}{2 \times 3^t}$$

$$= \frac{3^t(3^3 + 1)}{2 \times 3^t}$$

$$= \frac{3^3 + 1}{2}$$

$$= \frac{28}{2}$$

$$= 14$$

$$\text{(r)} \quad \frac{2^{3p} + 1}{2^p + 1}$$

$$= \frac{(2^p + 1)(2^{2p} - 2^p + 1)}{(2^p + 1)}$$

$$= 2^{2p} - 2^p + 1$$

$$z = 16$$

$$\text{(g)} \quad 16x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$$

$$16x^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{16}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$x = \frac{1}{16}$$

$$\text{(h)} \quad m^0 + m^{-1} = 0$$

$$1 + m^{-1} = 0$$

$$m^{-1} = -1$$

$$(m^{-1})^{-1} = (-1)^{-1}$$

$$m = -1$$

$$\text{(i)} \quad t^{\frac{1}{2}} - 3t^{\frac{1}{4}} + 2 = 0$$

$$(t^{\frac{1}{4}} - 1)(t^{\frac{1}{4}} - 2)$$

$$t^{\frac{1}{4}} - 1 = 0 \text{ of } t^{\frac{1}{4}} - 2 = 0$$

$$\text{as } t^{\frac{1}{4}} - 1 = 0 :$$

$$t^{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\left(t^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 1^4$$

$$t = 1$$

$$\text{as } t^{\frac{1}{4}} - 2 = 0 :$$

$$t^{\frac{1}{4}} = 2$$

$$\left(t^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 2^4$$

$$t = 16$$

$$\text{(j)} \quad 3^p + 3^p + 3^p = 27$$

$$3 \times 3^p = 27$$

$$3^{p+1} = 3^3$$

$$p+1 = 3$$

$$p = 2$$

$$\begin{aligned} \text{(k)} \quad k^{-1} - 7k^{-\frac{1}{2}} - 18 &= 0 \\ (k^{-\frac{1}{2}} - 9)(k^{-\frac{1}{2}} + 2) &= 0 \\ k^{-\frac{1}{2}} - 9 = 0 \quad \text{of} \quad k^{-\frac{1}{2}} + 2 &= 0 \\ k^{-\frac{1}{2}} = 9 \quad \text{of} \quad k^{-\frac{1}{2}} = -2 \\ \text{as } k^{-\frac{1}{2}} = 9 : \\ (k^{-\frac{1}{2}})^{-2} &= 9^{-2} \\ k &= \frac{1}{81} \\ \text{as } k^{-\frac{1}{2}} = -2 : \\ (k^{-\frac{1}{2}})^{-2} &= (-2)^{-2} \\ k &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(l)} \quad x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 18 &= 0 \\ (x^{\frac{1}{4}} + 6)(x^{\frac{1}{4}} - 3) &= 0 \\ x^{\frac{1}{4}} + 6 = 0 \quad \text{of} \quad x^{\frac{1}{4}} - 3 &= 0 \\ x^{\frac{1}{4}} = -6 \quad \text{of} \quad x^{\frac{1}{4}} = 3 \\ \text{as } x^{\frac{1}{4}} = -6 : \\ \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4 &= (-6)^4 \\ x &= 1296 \\ \text{as } x^{\frac{1}{4}} = 3 : \\ (x^{\frac{1}{4}})^4 &= (3)^4 \\ x &= 81 \end{aligned}$$

Oefening 4 - 1

- Skryf die volgende drie terme neer in elk van die reekse:
 - 5; 15; 25; ...
 - 8; -3; 2; ...
 - 30; 27; 24; ...
- Hieronder is die algemene formules gegee vir 'n paar reekse. Bereken die terme wat weggelaat is.

(a) 0; 3; ...; 15; 24	$T_n = n^2 - 1$
(b) 3; 2; 1; 0; ...; -2	$T_n = -n + 4$
(c) -11; ...; -7; ...; -3	$T_n = -13 + 2n$
- Vind die algemene formule vir elk van die volgende reekse en vind dan T_{10} , T_{50} en T_{100} :
 - 2; 5; 8; 11; 14; ...
 - 0; 4; 8; 12; 16; ...
 - 2; -1; -4; -7; -10; ...

Oplossings vir Oefening 4 - 1

- 35; 45; 55
 - 7; 12; 17
 - 21; 18; 15
- | | |
|--|---|
| (a) $T_n = n^2 - 1$
$T_3 = 3^2 - 1$
$= 9 - 1$
$= 8$ | $T_2 = -13 + 2(2)$
$= -13 + 4$
$= -9$
$T_n = -13 + 2n$ |
| (b) $T_n = -n + 4$
$T_5 = -5 + 4$
$= -1$ | $T_4 = -13 + 2(4)$
$= -13 + 8$
$= -5$ |
| (c) $T_n = -13 + 2n$ | |
-

(a) $a = 2$

$d = 3$

$T_n = 3n - 1$

$T_{10} = 3(10) - 1 = 29$

$T_{50} = 3(50) - 1 = 149$

$T_{100} = 3(100) - 1 = 299$

(b) $a = 0$

$d = 4$

$T_n = 4n - 4$

$T_{10} = 4(10) - 4 = 36$

$T_{50} = 4(50) - 4 = 196$

$T_{100} = 4(100) - 4 = 396$

(c) $a = 2$

$d = -3$

$T_n = 5 - 3n$

$T_{10} = 5 - 3(10) = -25$

$T_{50} = 5 - 3(50) = -145$

$T_{100} = 5 - 3(100) = -295$

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Vind die 6^{de} term vir die volgende reekse:

(a) 4; 13; 22; 31; ...

(b) 5; 2; -1; -4; ...

(c) 7,4; 9,7; 12; 14,3; ...

2. Vind die algemene term vir die volgende reekse:

(a) 3; 7; 11; 15; ...

(b) -2; 1; 4; 7; ...

(c) 11; 15; 19; 23; ...

(d) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1; $1\frac{1}{3}$; ...

3. Die sitplekke in 'n gedeelte van 'n sportstadion kan so gerangskik word dat die eerste ry 15 sitplekke het, die tweede ry 19 sitplekke, die derde ry 23 sitplekke, ens. Bereken hoeveel sitplekke is daar in ry 25.

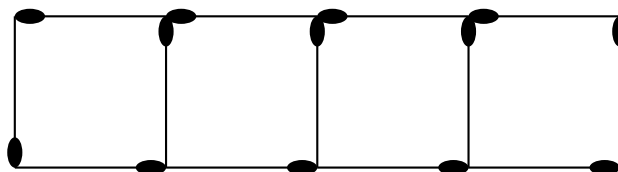
4. 'n Enkele vierkant kan gemaak word van 4 vuurhoutjies. Om twee vierkante langs mekaar te maak het 7 vuurhoutjies nodig, om drie vierkante langs mekaar in 'n ry te maak het ons 10 vuurhoutjies nodig. Bepaal:

(a) die eerste term

(b) die konstante verskil

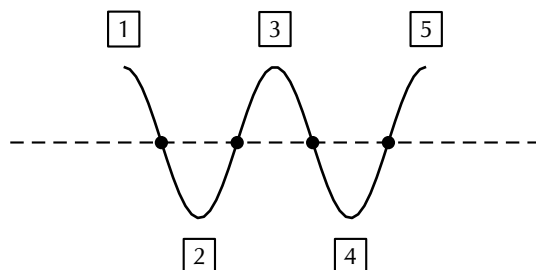
(c) die algemene formule

(d) hoeveel vuurhoutjies benodig word om 25 vierkante langs mekaar te maak.



5. Jy wil begin om geld te spaar, maar omdat jy dit nog nooit gedoen het nie, besluit jy om stadig te begin. Aan die einde van die eerste week sit jy R 5 in jou bankrekening, aan die einde van die tweede week R 10 en aan die einde van die derde week R 15. Na hoeveel weke sit jy R 50 in jou bankrekening?

6. 'n Horisontale lyn kruis 'n tou op 4 punte en deel die tou op in 4 dele, soos hieronder gewys word.



As die tou 19 keer gekruis word deur ewewydige lyne en elke lyn kruis die tou 4 keer op verskillende plekke, bereken in hoeveel dele die tou opgedeel word.

7. Beskou die volgende patroon:

$$9 + 16 = 25$$

$$9 + 28 = 37$$

$$9 + 43 = 52$$

- Watter patroon sien jy?
- Maak 'n bewering en druk dit uit in woorde.
- Veralgemeen jou bewering en druk dit algebraïes uit.
- Bewys dat jou bewering waar is.

Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge

- $T_6 = 49$
 - $T_6 = -10$
 - $T_6 = 18,9$
 - $T_n = 4n + 7$
 - $T_n = 3n - 5$
 - $T_n = \frac{n}{3}$
- Onttrek die toepaslike inligting wat 'n patroon is: 15; 19; 23...

$a = 15$

$d = 4$

$T_n = 4n + 11$

So die aantal sitplekke in ry 25 is:

$T_{25} = 4(25) + 11 = 111$
- Die eerste term 4 omdat dit die nommer vuurhoutjies wat vir een vierhoek nodig is.
 - Die konstante verskil tussen die terme is 3. ($7 - 4 = 3$; $10 - 7 = 3$)
 - $T_n = 3n + 1$
 - $T_{25} = 3(25) + 1 = 76$
- Skryf neer die eerste patroon:

5; 10; 15; ... Eerstens vind ons die algemene formule:

$$a = 5$$

$$d = 5$$

$$T_n = 5n$$

$$50 = 5n$$

$$n = 10 \text{ weke}$$

6. Met een lyn wat by vier punte kruis, kry ons vyf dele. As ons 'n tweede lyn byvoeg, is dit nou in 9 parte opgedeel. En, as ons 'n derde lyn byvoeg is dit nout in 13 parte opgedeel. Dus sien ons dat elke bykomende lyn vier meer dele byvoeg. Die volgorde is: 5; 9; 13...

$$a = 5$$

$$d = 4$$

$$T_n = 4n + 1$$

$$T_{19} = 4(19) + 1$$

$$T_{19} = 77$$

7. (a) Die eerste syfer van die antwoord verhoog by een getal en die tweede syfer verminder by een getal.
- (b) Waaneer 9 by enige twee-syfer nommer getel is, is die antwoord die twee-syfer nommer, met sy eerste ('tien') syfer verhoog by een nommer en sy tweede ('een') syfer verminder by een nommer.
- (c) $9 + (10x + y) = 10(x + 1) + (y - 1)$
- (d) $9 + 16 = 25$
- $$9 + (10x + y) = 10(x + 1) + (y - 1)$$
- $$9 + (10 + 6) = 10(2) + (6 - 1)$$
- $$9 + 16 = 20 + 5 = 25$$
- $$9 + (10x + y) = 10x + 10 + y - 1$$
- $$9 + (10x + y) = (10 - 1) + (10x + y) = 9 + (10x + y)$$

Oefening 5 - 1

1. Skryf die volgende in keurdernotasie:

(a) $(-\infty; 7]$

(b) $[13; 4)$

(c) $(35; \infty)$

(d) $[\frac{3}{4}; 21)$

(e) $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

(f) $(-\sqrt{3}; \infty)$

2. Skryf die volgende in intervalnotasie:

(a) $\{p : p \in \mathbb{R}, p \leq 6\}$

(b) $\{k : k \in \mathbb{R}, -5 < k < 5\}$

(c) $\{x : x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{5}\}$

(d) $\{z : z \in \mathbb{R}, 21 \leq z < 41\}$

Oplossings vir Oefening 5 - 1

1. (a) $\{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 7\}$

(b) $\{y : y \in \mathbb{R}, -13 \leq y < 4\}$

(c) $\{z : z \in \mathbb{R}, z > 35\}$

(d) $\{t : t \in \mathbb{R}, \frac{3}{4} \leq t < 21\}$

(e) $\{p : p \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{1}{2}\}$

(f) $\{m : m \in \mathbb{R}, m > -\sqrt{3}\}$

2. (a) $(-\infty; 6]$

(b) $(-5; 5)$

(c) $(\frac{1}{5}; \infty)$

(d) $[21; 41)$

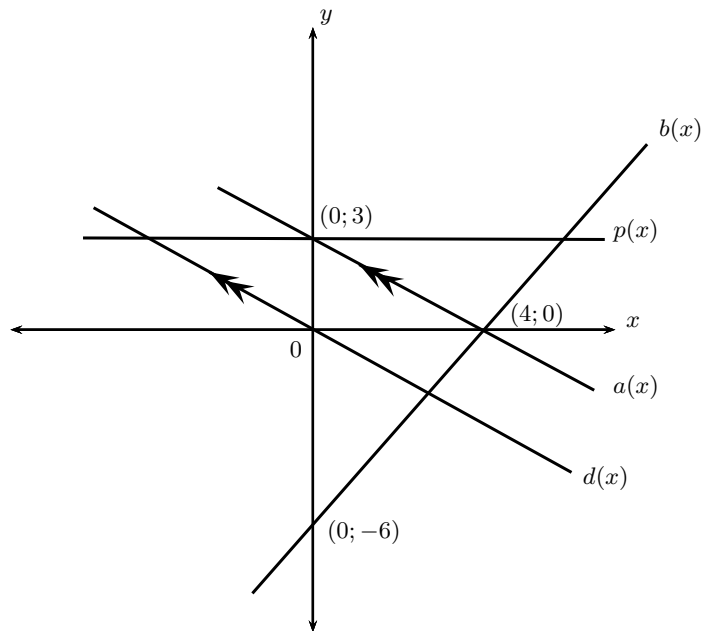
Oefening 5 - 2

1. Gee die x - en y -afsnitte van die volgende reguitlyngrafieke. Dui aan of die grafiek toeneem of afneem as x toeneem:

- | | |
|---------------------|-------------------------------------|
| (a) $y = x + 1$ | (e) $3y - 2x = 6$ |
| (b) $y = x - 1$ | (f) $k(x) = -3$ |
| (c) $h(x) = 2x - 1$ | (g) $x = 3y$ |
| (d) $y + 3x = 1$ | (h) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ |

2. Gee die vergelykings van elk van die volgende grafieke:

- (a) $a(x)$
 (b) $b(x)$
 (c) $p(x)$
 (d) $d(x)$



3. Skets die volgende funksies op dieselfde stel asse deur die afsnitte metode te gebruik. Dui die as-afsnitte duidelik aan asook die koördinate van die snypunt van die grafieke van $x + 2y - 5 = 0$ en $3x - y - 1 = 0$.
4. Trek die grafieke van $f(x) = 3 - 3x$ en $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$ met die gradiënt-afsnit metode.

Oplossings vir Oefening 5 - 2

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. (a) $(0; 1)$ en $(-1; 0)$; toenemend | (e) $(0; 2)$ en $(-3; 0)$; toenemend |
| (b) $(0; -1)$ en $(1; 0)$; toenemend | (f) $(0; 3)$; horisontale lyn |
| (c) $(0; -1)$ en $(\frac{1}{2}; 0)$; toenemend | (g) $(0; 0)$; toenemend |
| (d) $(0; 1)$ en $(\frac{1}{3}; 0)$; afnemend | (h) $(0; 3)$ en $(2; 0)$; afnemend |

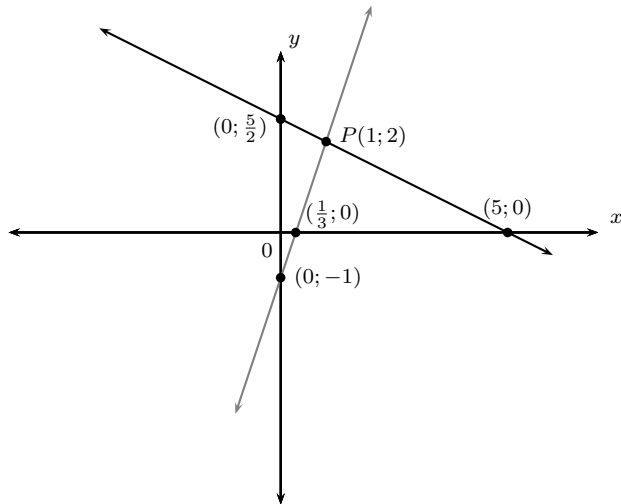
2.

(a) $a(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

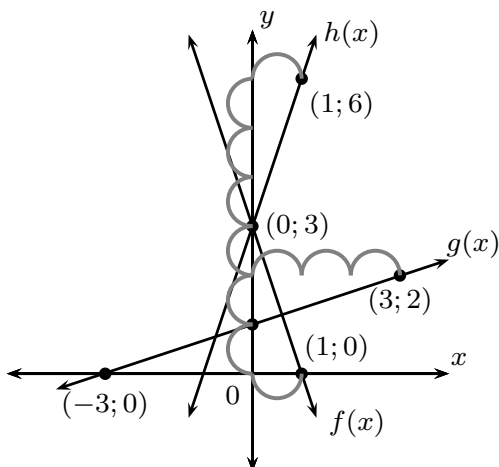
(b) $b(x) = \frac{3}{2}x - 6$

(c) $p(x) = 3$

(d) $d(x) = -\frac{3}{4}x$



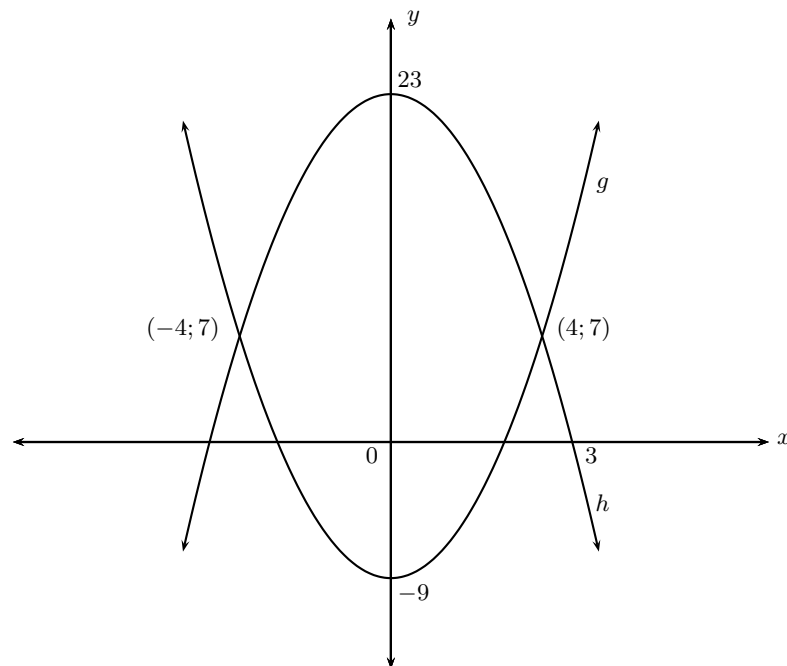
3.



4.

Oefening 5 - 3

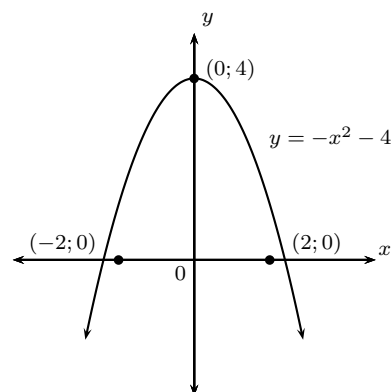
1. Wys dat indien $a < 0$ sal die waardeversameling van $f(x) = ax^2 + q$ $\{f(x) : f(x) \leq q\}$ wees.
2. Skets die grafiek van die funksie $y = -x^2 + 4$ en toon al die afsnitte met die asse.
3. Twee parabole is geteken: $g(x) = y = ax^2 + p$ en $h(x) = y = bx^2 + q$.



- (a) Vind die waardes van a en p .
- (b) Vind die waardes van b en q .
- (c) Vind die waardes van x waarvoor $g(x) \geq h(x)$.
- (d) Vir watter waardes van x is $g(x)$ toenemend?

Oplossings vir Oefening 5 - 3

1. Omdat die vierkant van enige nommer altyd positief is, het ons: $x^2 \geq 0$
 As ons met a vermenigvuldig, waar ($a < 0$) verander die rigting van die ongelijkheid:
 $ax^2 \leq 0$
 Tel q by ann albei kante van die vergelyking gee $ax^2 + q \leq q$
 Dus $f(x) \leq q$
 Dit gee die waardeversameling $(-\infty; q)$.



- 2.
3. (a) p is die y -afsnit, dus $p = -9$

Om a te vind, gebruik ons een van die punte op die grafiek (b.v. $(4; 7)$):

$$y = ax^2 - 9$$

$$7 = a(4^2) - 9$$

$$16a = 16$$

$$\therefore a = 1$$

(b) q is die y -afsnit, dus $q = 23$

Om b te vind, gebruik ons een van die punte op die grafiek (b.v. $(4; 7)$): $y = bx^2 = 23$

$$7 = b(4^2) + 23$$

$$16b = -16$$

$$\therefore b = -1$$

(c) Dit is die punt waar g bo h lê. Van die grafiek, sien ons dat g bo h lê wanneer:

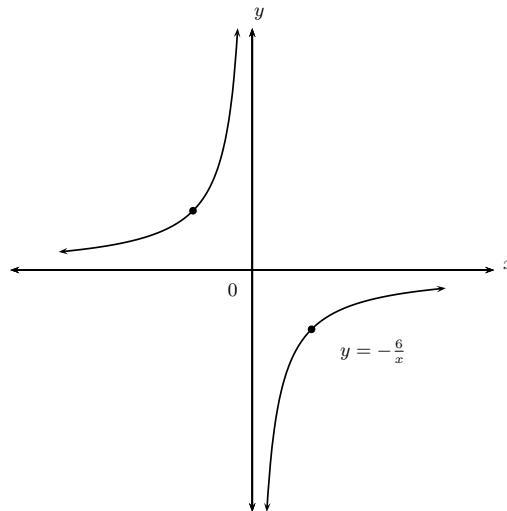
$$x \leq -4 \text{ or } x \geq 4$$

(d) g word vermeerder van die draaipunt $(0; -9)$ af, m.a.w. vir $x \geq 0$

Oefening 5 - 4

1. Gebruik grafiekpapier en teken die grafiek van $xy = -6$.
 - (a) Lê die punt $(-2; 3)$ op die grafiek? Gee 'n rede vir jou antwoord.
 - (b) As die x -waarde van 'n punt op die grafiek gelyk is aan $0,25$ wat is die ooreenstemmende y -waarde?
 - (c) Wat gebeur met die y -waardes as die x -waardes baie groot word?
 - (d) Gee die vergelykings van die asimptote.
 - (e) Met die lyn $y = -x$ as 'n lyn van simmetrie, watter punt is simmetries ten opsigte van $(-2; 3)$?
2. Skets die grafiek van $h(x) = \frac{8}{x}$.
 - (a) Hoe sal die grafiek $g(x) = \frac{8}{x} + 3$ vergelyk met die grafiek van $h(x) = \frac{8}{x}$? Verduidelik jou antwoord.
 - (b) Skets die grafiek van $y = \frac{8}{x} + 3$ op dieselfde assstelsel. Toon die asimptote, asse van simmetrie en die koördinate van een punt op die grafiek.

Oplossings vir Oefening 5 - 4



1.

(a) $y = \frac{-6}{x}$
 $xy = -6$

Vervang die waardes van die punt $(-2; 3)$ in die funksie:

$$xy = (-2)(3) = -6$$

Dit bevredig die vergelyking dus lê die punt op die grafiek.

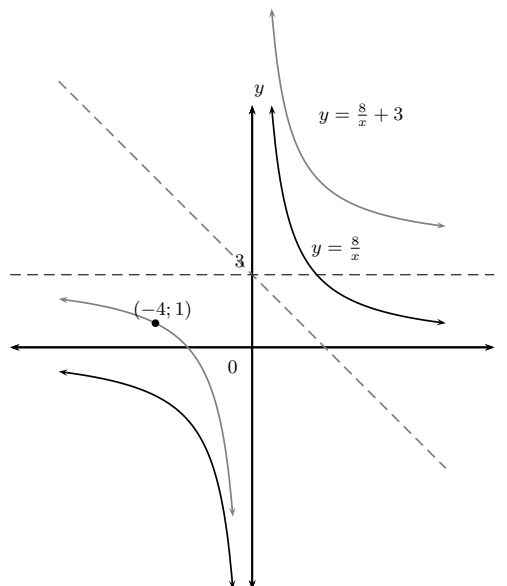
(b) Vervang in die waarde van x :

$$\begin{aligned} y &= \frac{-6}{0,25} \\ &= -6 \times 4 \\ &= -24 \end{aligned}$$

(c) Die y -waardes word verminder as die x -waardes baie groot word. Hoe groter die noemer (x), hoe kleiner die resultaat van die breuk (y).

(d) Die grafiek is nie horisontale of vertikale geskuif, dus is die asimptotes $y = 0$ en $x = 0$.

(e) Rondom die as van simmetrie $y = -x$, die punt simmetries met $(-2; 3)$ is $(-3; 2)$.



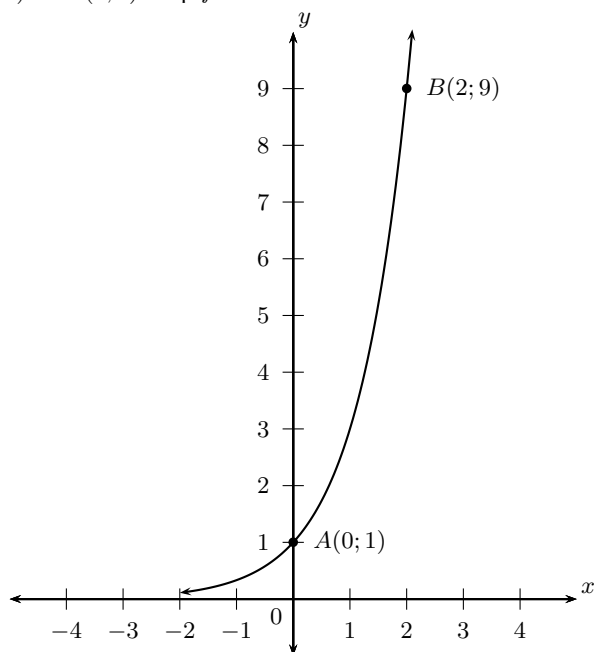
2.

(a) Di grafiek $g(x) = \frac{8}{x} + 3$ is die grafiek van $h(x) = \frac{8}{x}$, vertikale by 3 eenhede op geskuif. Hulle sou dieselfde vorm gehad het maar die asimptoot van $g(x)$ sou $y = 3$ gewees, in plaas van $y = 0$ (vir $h(x)$) en die simmetrie-as sou $y = -x + 3$ gewees in plaas van $y = -x$ (vir $h(x)$).

- (b) Grafiek van $y = \frac{8}{x} + 3$ is op dieselfde assestelsel hierbo.

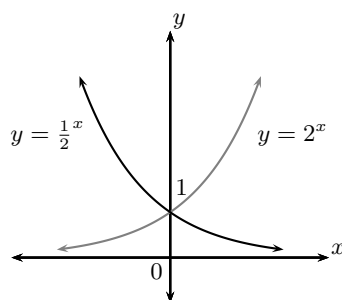
Oefening 5 - 5

- Skets die grafieke van $y = 2^x$ en $y = (\frac{1}{2})^x$ op dieselfde assestelsel.
 - Is die x -as die asimptoot en/of simmetrie-as in albei grafieke? Verduidelik jou antwoord.
 - Watter grafiek word aangedui met die vergelyking $y = 2^{-x}$? Verduidelik jou antwoord.
 - Los die vergelyking $2^x = (\frac{1}{2})^x$ met behulp van 'n skets op en kontroleer jou antwoord deur middel van substitusie.
- Die kurwe van die eksponensiële funksie f in die meegaande diagram sny die y -as by die punt $A(0; 1)$ en $B(2; 9)$ is op f .



- Bepaal die vergelyking van funksie f .
- Bepaal die vergelyking van h , die refleksie van die kurwe van f in die x -as.
- Bepaal die waardeversameling van h .
- Bepaal die vergelyking van g , die refleksie van die kurwe van f in die y -as.
- Bepaal die vergelyking van j indien j 'n vertikale strekking is van f met $+2$ eenhede.
- Bepaal die vergelyking van k indien k 'n vertikale skuif is van f met -3 eenhede.

Oplossings vir Oefening 5 - 5



1.

- (a) Die x -as is 'n asimptoot vir beide grafieke omdat beide na die x -as kom sonder om dit aan te raak.
- (b) $y = \frac{1}{2}^x$ word verteenwoordig deur die vergelyking $y = 2^{-x}$ omdat $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, wat gee $y = 2^{-x}$.
- (c) Die grafieke sny mekaar by die punt $(0; 1)$. As ons hierdie waardes in beide kante van die vergelyking vervang, kry ons:
 LK: $2^x = 2^0 = 1$ en
 RK: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
 LK = RK, dus is die antwoord korrek.

2. (a) Die algemene vorm van die vergelyking is $f(x) = a^x + q$.Ons is gegee $A(0; 1)$ en $B(2; 9)$.Vervang in die waardes van punt A :

$$1 = a^0 + q$$

$$1 = 1 + q$$

$$\therefore q = 0$$

Vervang in die waardes van punt B :

$$9 = a^2 + 0$$

$$a^2 = 3^2$$

$$\therefore a = 3$$

Dus is die vergelyking $f(x) = 3^x$.

(b) $h(x) = -3^x$

(c) Waardeversameling: $(-\infty; 0)$

(d) $g(x) = 3^{-x}$

(e) $j(x) = 2 \cdot 3^x$

(f) $k(x) = 3^x - 3$

Oefening 5 - 6

1. Deur jou kennis van die invloed van a en q te gebruik, skets elk van die volgende grafieke sonder om 'n tabel van waardes te gebruik, vir $\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$.

(a) $y = 2 \sin \theta$

(d) $y = \sin \theta - 3$

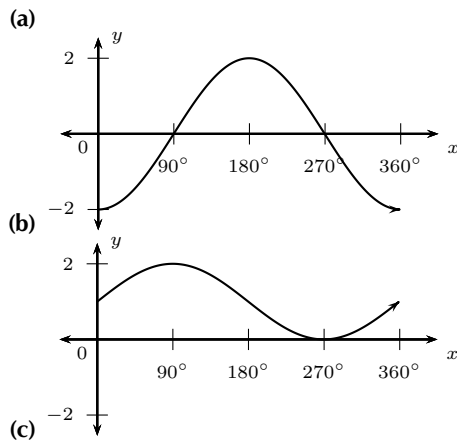
(b) $y = -4 \cos \theta$

(e) $y = \tan \theta - 2$

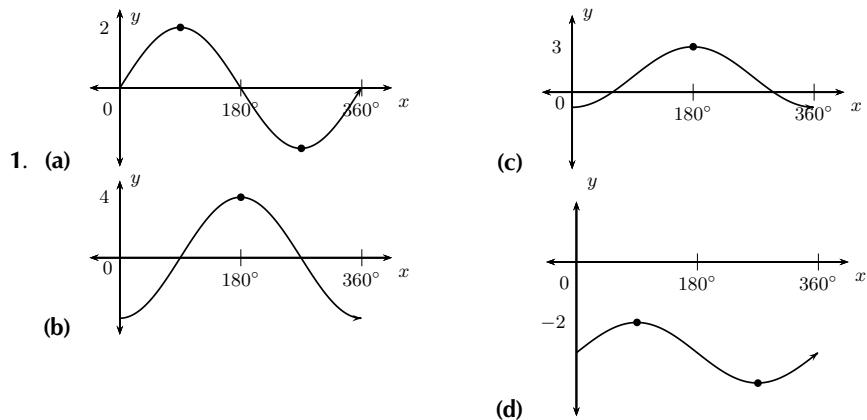
(c) $y = -2 \cos \theta + 1$

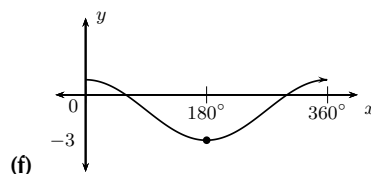
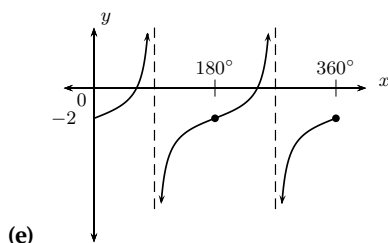
(f) $y = 2 \cos \theta - 1$

2. Gee die vergelykings van elk van die volgende grafieke:



Oplossings vir Oefening 5 - 6





2. (a) $y = 2 \cos \theta$
 (b) $y = \sin \theta + 1$

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Skets die grafieke van die volgende:

(a) $y = 2x + 4$ (b) $y - 3x = 0$ (c) $2y = 4 - x$

2. Skets die volgende funksies:

(a) $y = x^2 + 3$ (b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$ (c) $y = 2x^2 - 4$

3. Skets die volgende funksies en identifiseer die asimptote:

(a) $y = 3^x + 2$ (b) $y = -4 \times 2^x$ (c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$

4. Skets die volgende funksies en identifiseer die asimptote:

(a) $y = \frac{3}{x} + 4$ (b) $y = \frac{1}{x}$ (c) $y = \frac{2}{x} - 2$

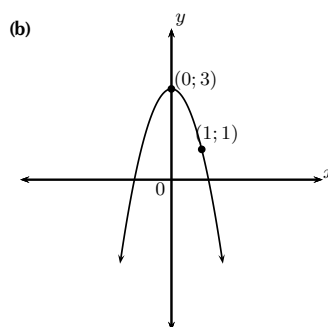
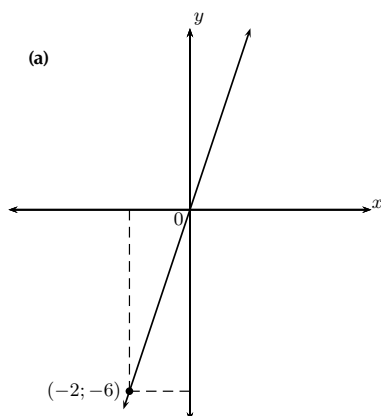
5. Bepaal of die volgende bewerings waar of vals is. As 'n bewering vals is, gee redes hoekom

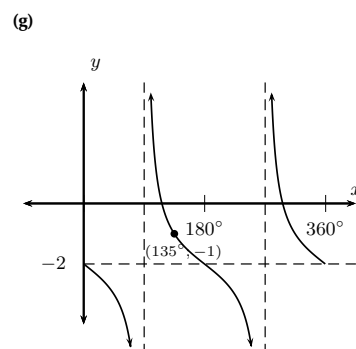
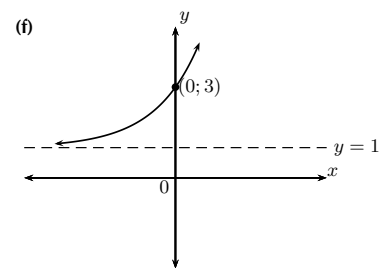
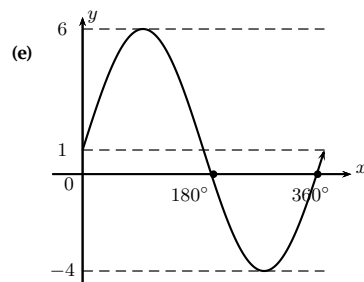
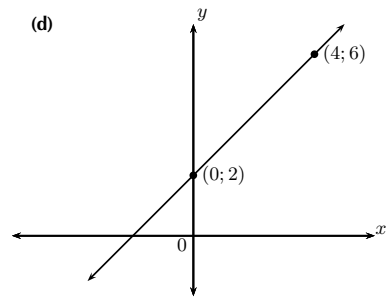
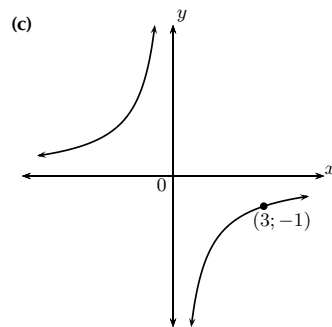
- (a) Die gegewe of gekose y -waarde staan bekend as die afhanklike veranderlike.
 (b) 'n Grafiek wat geen onderbrekings het nie, word kongruent genoem
 (c) Funksies van die vorm $y = ax + q$ is reguitlyne.
 (d) Funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$ is eksponensiële funksies.
 (e) 'n Asimptoot is 'n reguit of gekromde lyn wat 'n grafiek ten minste een keer sny.
 (f) Gegee die funksie in die vorm $y = ax + q$, word die y -afsnit gevind deur $x = 0$ te stel en op te los vir y .

6. Gegee die funksies $f(x) = 2x^2 - 6$ en $g(x) = -2x + 6$:

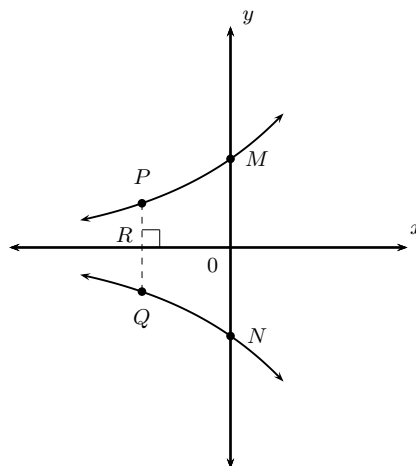
- (a) Skets f en g op dieselfde assentelsel.
 (b) Bereken die snypunte van f en g .
 (c) Gebruik nou die grafieke en hulle snypunte om vir x op te los wanneer:
 i. $f(x) > 0$

- ii. $g(x) < 0$
 - iii. $f(x) \leq g(x)$
- (d) Gee die vergelyking van die refleksie van f in die x -as.
7. Nadat 'n bal laat val word, is die hoogte wat die bal terugbons elke keer minder. Die vergelyking $y = 5(0,8)^x$ toon die verwantskap tussen x , die nommer van die bons, en y , die hoogte van die bons vir 'n spesifieke bal. Wat is die benaderde hoogte van die vyfde bons tot die naaste tiende van 'n eenheid?
8. Mark het 15 muntstukke in R 5 en R 2-stukke. Hy het 3 meer R 2-stukke as R 5-stukke. Hy het 'n stelsel van vergelykings opgestel om die situasie te toon, waar x die aantal R 5-stukke voorstel en y die aantal R 2-stukke. Hy het vervolgens die probleem grafies opgelos.
- (a) Skryf die sisteem van vergelykings neer.
 - (b) Skets die grafieke op dieselfde assestelsel.
 - (c) Wat is die oplossing?
9. Skets die grafieke van die volgende trigonometries funksies as $\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$. Wys die afsnitte en asimptote.
- (a) $y = -4 \cos \theta$
 - (b) $y = \sin \theta - 2$
 - (c) $y = -2 \sin \theta + 1$
 - (d) $y = \tan \theta + 2$
 - (e) $y = \frac{\cos \theta}{2}$
10. As die algemene vergelykings $y = mx + c$, $y = ax^2 + q$, $y = \frac{a}{x} + q$, $y = a \sin x + q$, $y = a^x + q$ en $y = a \tan x$ gegee is, bereken die spesifieke vergelykings vir elkeen van die volgende grafieke





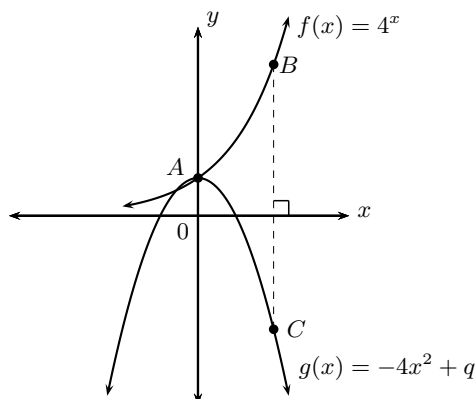
11. $y = 2^x$ en $y = -2^x$ is hieronder geskets. Antwoord die vrae wat volg:



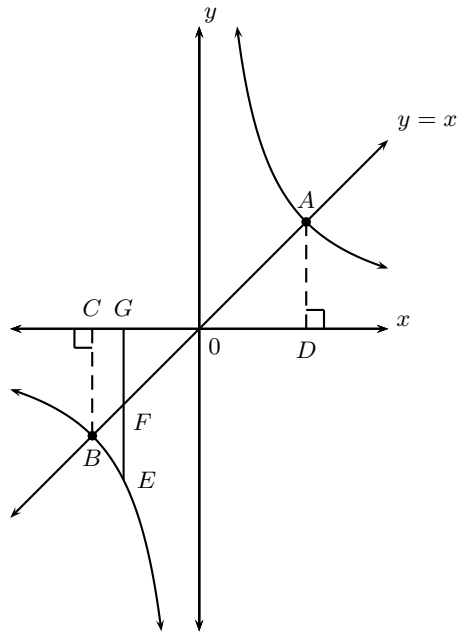
- Bereken die koördinate van M en N .
- Bereken die lengte MN .

- (c) Bereken lengte van PQ as OR 1 eenheid is.
- (d) Gee die vergelyking as $y = 2^x$ weerspieël word in die y -as.
- (e) Gee die waardeversameling van elke grafieke.

12. $f(x) = 4^x$ en $g(x) = 4x^2 + q$ is hieronder geskets. Die punte $A(0; 1)$, $B(1; 4)$ is C gegee. Antwoord die vrae wat volg:



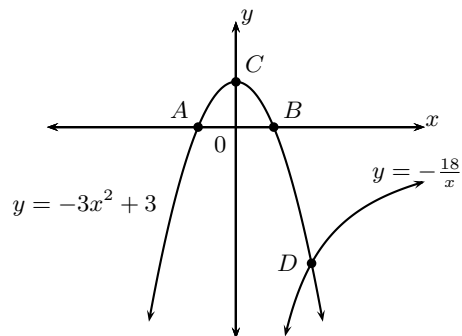
- (a) Bepaal die waarde van q .
 - (b) Bereken die lengte van BC .
 - (c) Gee die vergelyking van $f(x)$ weerspieël in die x -as.
 - (d) Gee die vergelyking van $f(x)$ 1 eenheid vertikaal opwaarts geskuif.
 - (e) Gee die vergelyking van die asimptote van $f(x)$.
 - (f) Gee die waardeversamelings van $f(x)$ en $g(x)$.
13. Skets die grafieke van $h(x) = x^2 - 4$ en $k(x) = -x^2 + 4$ op dieselfde assestelsel en antwoord die vrae wat volg:
- (a) Beskryf die verhouding tussen h en k .
 - (b) Gee die vergelyking van $k(x)$ weerspieël in die lyn $y = 4$.
 - (c) Gee die definisieversameling en die waardeversameling van h .
14. Skets die grafieke van $f(\theta) = 2 \sin \theta$ en $g(\theta) = \cos \theta - 1$ op dieselfde assestelsel. Gebruik jou skets om te bepaal:
- (a) $f(180^\circ)$
 - (b) $g(180^\circ)$
 - (c) $g(270^\circ) - f(270^\circ)$
 - (d) Die definisieversameling en die waardeversameling van g .
 - (e) Die amplitude en periode van f .
15. Die grafieke van $y = x$ en $y = \frac{8}{x}$ word in die diagram getoon.



Bereken:

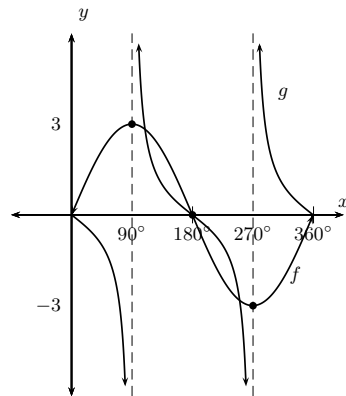
- (a) die koördinate van A en B .
- (b) die lengte van CD .
- (c) die lengte van AB .
- (d) die lengte van EF , gegewe $G(-2; 0)$.

16. In die diagram word die skets van $y = -3x^2 + 3$ en $y = -\frac{18}{x}$ getoon.



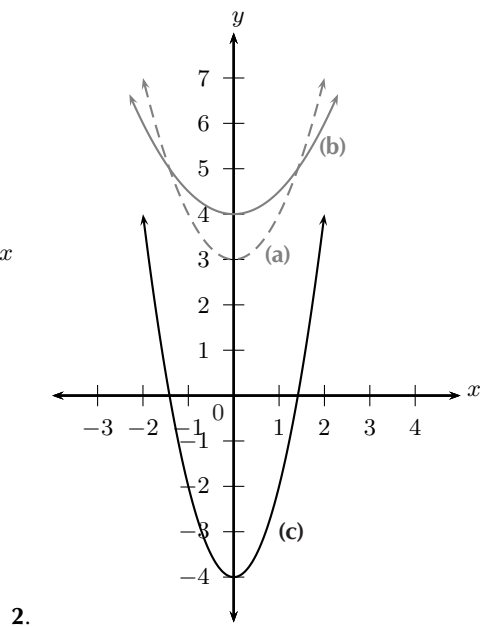
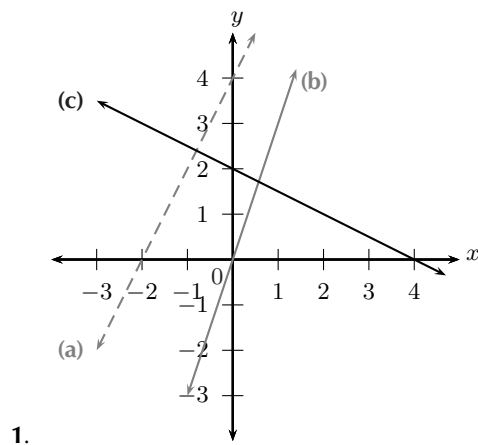
- (a) Bereken die koördinate van A , B en C .
- (b) Beskryf in woorde wat gebeur by punt D .
- (c) Bereken die koördinate van D .
- (d) Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur C en D pas.

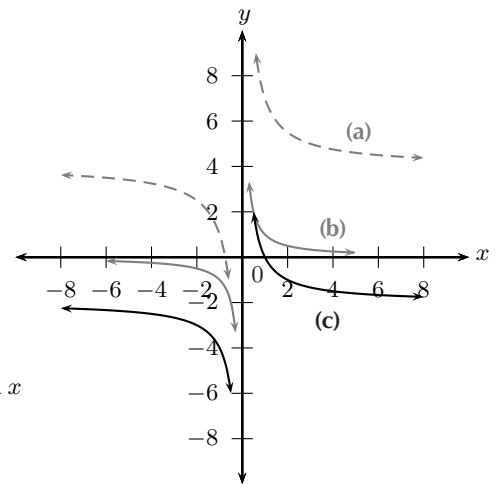
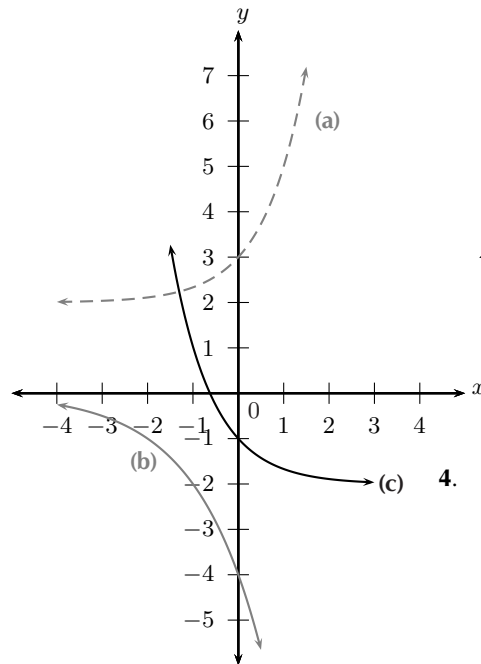
17. In die diagram hieronder is $f(\theta) = 3 \sin \theta$ en $g(\theta) = -\tan \theta$ geskets.



- (a) Gee die definisieversameling van g .
 (b) Wat is die amplitude van f ?
 (c) Bepaal vir watter waardes van θ :
- i. $f(\theta) = 0 = g(\theta)$
 - ii. $f(\theta) \times g(\theta) < 0$
 - iii. $\frac{g(\theta)}{f(\theta)} > 0$
 - iv. $f(\theta)$ toenemend is?

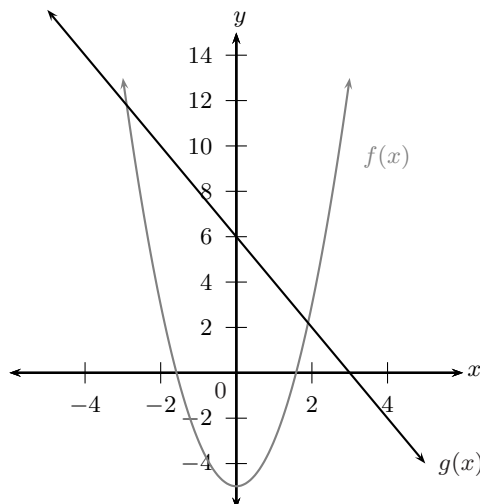
Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge





3.

5. (a) Vals - die y -waarde wat gegee is, is die afhanklike veranderlike omdat sy waarde hang af van die onafhanklike veranderlike x .
 (b) Vals - 'n grafiek is *deurlopende* as daar geen breke daarin is.
 (c) Waar.
 (d) Vals - funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$ is hiperboliese funksies.
 (e) Vals - 'n asimptoot is 'n reguitlyn wat 'n grafiek **nooit** nie sal deursny nie.
 (f) Waar.



6. (a)

- (b) Die x -waardes van die kruispunte kan gevind word om deur $f(x) = g(x)$ te sit:

$$2x^2 - 6 = -2x + 6$$

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x - 2)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ and } x = -3.$$

Bereken die y -waardes:

$$g(x) = -2(-3) + 6 = 12$$

$$g(x) = -2(2) + 6 = 2$$

Dus die twee kruispunte is $(-3; 12)$ en $(2; 2)$.

(c) i. Laat $f(x) = 0$

$$2x^2 - 6 = 0$$

$$2x^2 = 6$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Dus, $f(x) > 0$, $x \in (-\infty; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$.

ii. Laat $g(x) = 0$

$$-2x + 6 = 0$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

Dus, $g(x) < 0$, $x \in (3; \infty)$.

iii. As $f(x) \leq g(x)$, $x \in [-3; 2]$.

(d) $y = -2x^2 + 6$

7. $y = 5(0,8)^x$

$$= 5\left(\frac{4}{5}\right)^x$$

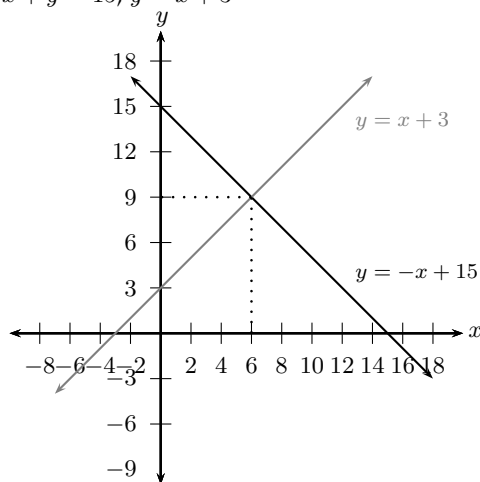
as $x = 5$, $y = 5\left(\frac{4}{5}\right)^5$

$$= 5\left(\frac{1024}{3125}\right)$$

$$= 5(0,38)$$

$$= 1,6 \text{ eenhede}$$

8. (a) $x + y = 15$; $y = x + 3$



(b)

(c) Vervang waarde van $y = -x + 15$ in tweede vergelyking:

$$-x + 15 = x + 3$$

$$-2x = -12$$

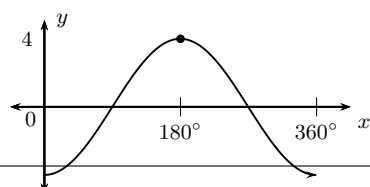
$$\therefore x = 6$$

Vervang waarde van x terug in eerste vergelyking:

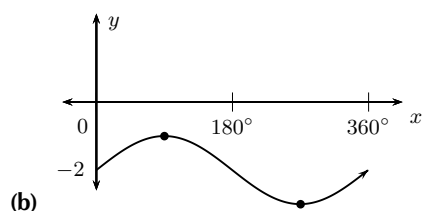
$$y = -(6) + 15$$

$$= 9$$

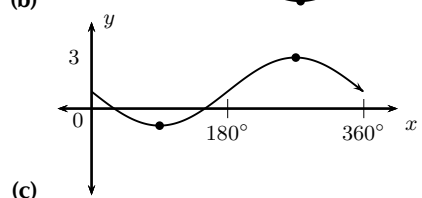
Mark het 6 R 5 muntstukke en 9 R 2 muntstukke.



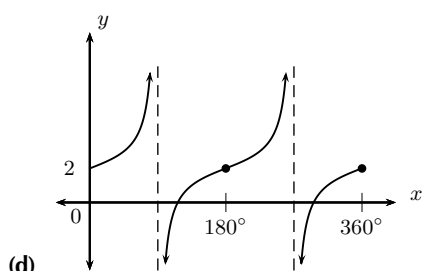
9. (a)



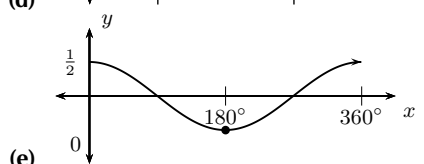
(b)



(c)



(d)



(e)

10. (a) $y = 3x$
 (b) $y = -2x^2 + 3$
 (c) $y = \frac{-3}{x}$
 (d) $y = x + 2$
 (e) $y = 5 \sin x + 1$
 (f) $y = 2 \cdot 2^x + 1$
 (g) $y = -\tan x - 2$

11. (a) As M , $y = 2^0 = 1$
 dus die koördinate van M is $(0; 1)$.
 As N , $y = -(2^0) = -1$
 dus die koördinate van N is $(0; -1)$.

(b) $MN = 1 + 1 = 2$ eenhede

(c) By P , $x = -1$

$$\therefore y = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{By } Q, y = -(2^{-1}) = -\frac{1}{2}.$$

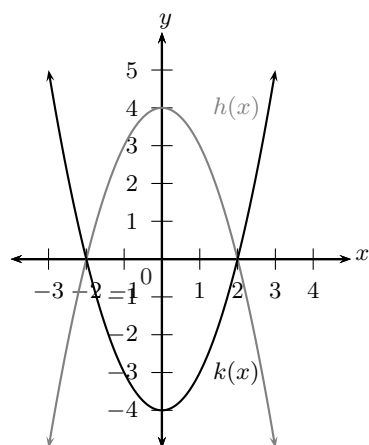
$$\text{Dus lengte } PQ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ eenheid.}$$

(d) $y = 2^{-x}$

(e) Waardeversameling $y = 2^x$: $(0; \infty)$

$$\text{Waardeversameling } y = -2^x: (-\infty; 0)$$

12. (a) $q = 1$
 (b) $BC = 7$ eenhede
 (c) $y = -4^x$
 (d) $y = 4^x + 1$
 (e) $x = 0$
 (f) Waardeversameling $f(x)$: $(0; \infty)$
 Waardeversameling $g(x)$: $(-\infty; 1]$

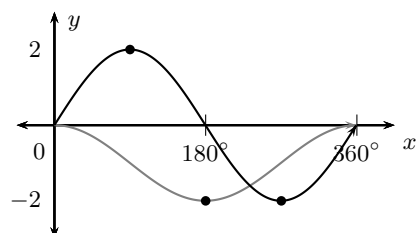


13.

- (a) $h(x) = x^2 - 4$
 $k(x) = -x^2 + 4$
 $= -(x^2 - 4)$
 $= -h(x)$
 $k(x)$ is dus die spieëlbeeld $h(x)$ rondom die x -as.

(b) $y = x^2 + 4$

- (c) Definisieversameling h : $(-\infty; \infty)$
 Waardeversameling h : $[-4; \infty)$



14.

- (a) $f(180^\circ) = 0$
 (b) $g(180^\circ) = -2$
 (c) $g(270^\circ) - f(270^\circ) = -1 - (-2)$
 $= -1 + 2$
 $= 1$
 (d) Definisieversameling: $[0^\circ; 360^\circ]$
 Waardeversameling: $[-2; 0]$
 (e) Amplitude = 2
 Periode = 360°

15. (a) $x = \frac{8}{x}$
 $x^2 = 8$

$\therefore x = \pm\sqrt{8}$

Dus $A(\sqrt{8}; \sqrt{8})$ en $B(-\sqrt{8}; -\sqrt{8})$

(b) $C(-\sqrt{8}; 0)$ en $D(\sqrt{8}; 0)$

$\therefore CD = \sqrt{8} + \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$ eenhede

(c) Gebruik Pythagoras: $OD = \sqrt{8}$ eenhede en $AD = \sqrt{8}$ eenhede

$AO^2 = OD^2 + AD^2$

$= (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2$

$= 8 + 8$

$= 16$

$\therefore AO = 4$ eenhede

Sort gelyk, $OB = 4$ eenhede

$\therefore AB = 8$ eenhede

(d) Dit word gegee dat $G(-2; 0)$, dus $F(-2; -2)$ op die reguitlyn $y = x$.

Dus is die lengte $EF = -2 - (-4) = 2$ eenhede

16. (a) $y = -3x^2 + 3$

Laat $y = 0$,

$0 = -3x^2 + 3$

$= x^2 - 1$

$= (x - 1)(x + 1)$

$\therefore x = -1$ en $x = 1$

Dus $A(-1; 0)$ en $B(1; 0)$

As $x = 0, y = -3(0)^2 + 3$

Dus $C(0; 3)$.

(b) Die parabool en die hiperbool sny mekaar op die punt D wat in die vierde kwadrant lê.

(c) $-\frac{18}{x} = -3x^2 + 3$

$$-18 = -3x^3 + 3x$$

$$0 = -3x^3 + 3x + 18$$

$$0 = x^3 - x - 6$$

$$f(2) = (2)^3 - 2 - 6 = 0$$

$$\text{as } x = 2, y = -3(2)^2 + 3 = -9$$

Dus $D(2; -9)$.

(d) Bepaal die gradiënt $D(2; -9)$ en $C(0; 3)$:

$$m = \frac{-9-3}{2-0} = -6$$

Dus $y = -6x + 3$

17. (a) Definisieversameling: $\{\theta : 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ, \theta \neq 90^\circ; 270^\circ\}$

(b) Amplitude = 3

(c) i. $\{0^\circ; 180^\circ; 360^\circ\}$

ii. $(0^\circ; 90^\circ) \cup (270^\circ; 360^\circ)$

iii. $\{\theta : 90^\circ < \theta < 270^\circ, \theta \neq 180^\circ\}$

iv. $(0^\circ; 90^\circ) \cup (270^\circ; 360^\circ)$

Oefening 6 - 1

1. 'n Bedrag van R 3 500 word belê in 'n spaarrekening wat enkelvoudige rente betaal teen 'n koers van 7,5% p.a. Bereken die eindbedrag na 2 jaar.
2. Bereken die enkelvoudige rente in die volgende probleme:
 - (a) 'n Lening van R 300 teen 'n koers van 8% vir 1 jaar.
 - (b) 'n Belegging van R 2 250 teen 'n koers van 12,5% per jaar vir 6 jaar.
3. Sally wil die aantal jare bereken wat sy R 1 000 moet belê om te groei tot R 2 500. Sy word 'n enkelvoudige rentekoers van 8,2% p.a aangebied. Hoe lank sal dit neem vir die geld om te groei tot R 2 500?
4. Joseph het R 5 000 by die bank gedeponeer vir sy 5 jaar oud seun se 21^{ste} verjaarsdag. Hy het sy seun R 18 000 op sy verjaarsdag gegee. Teen watter koers was die geld belê, indien enkelvoudige rente bereken was?

Oplossings vir Oefening 6 - 1

1. $P = 3\,500$
 $i = 0,075$
 $n = 2$
 $A = ?$
 $A = P(1 + in)$
 $A = 3\,500(1 + (0,075)(2))$
 $A = 3\,500(1,15)$
 $A = R\,4\,025$
2. (a) $P = 300$
 $i = 0,08$
 $n = 1$
 $A = ?$
 $A = P(1 + in)$
 $A = 300(1 + (0,08)(1))$
 $A = 300(1,08)$
 $A = R\,324$
(b) $P = 2\,250$
 $i = 0,125$
 $n = 6$
 $A = ?$
 $A = P(1 + in)$
 $A = 2\,250(1 + (0,125)(6))$
 $A = 2\,250(1,75)$
 $A = R\,3\,937,50$

3. $A = 2\,500$

$$P = 1\,000$$

$$i = 0,082$$

$$n = ?$$

$$A = P(1 + i \cdot n)$$

$$2\,500 = 1\,000(1 + (0,082)(n))$$

$$\frac{2\,500}{1\,000} = 1 + 0,082n$$

$$\frac{2\,500}{1\,000} - 1 = 0,082n$$

$$\left(\frac{2\,500}{1\,000} - 1\right)0,082 = n$$

$$n = 18,3$$

Dit sou 19 jare vat vir R 1 000 tot R 2 500 te groei by 8,2% p.a.

4. $A = 18\,000$

$$P = 5\,000$$

$$i = ?$$

$$n = 21 - 5 = 16$$

$$A = P(1 + in)$$

$$18\,000 = 5\,000(1 + (i)(16))$$

$$\frac{18\,000}{5\,000} = 1 + 16i$$

$$\frac{18\,000}{5\,000} - 1 = 16i$$

$$\left(\frac{18\,000}{5\,000} - 1\right)6 = i$$

$$i = 0,0125$$

Die rentekoers waarteen die geld belê was, is 1,25%.

Oefening 6 - 2

1. 'n Bedrag van R 3 500 word belê in 'n spaarrekening wat saamgestelde rente verdien teen 7,5% per jaar. Bereken die bedrag wat opgebou is in die rekening na verloop van 2 jaar.
2. Morgan belê R 5 000 in 'n rekening wat aan die einde van 5 jaar 'n groot bedrag uitbetaal. As hy R 7 500 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank hom aangebied?
3. Nicola wil geld belê teen 11% per jaar saamgestelde rente. Hoeveel geld (tot die naaste Rand) moet hy belê indien hy oor 5 jaar 'n bedrag van R 100 000 wil hê?

Oplossings vir Oefening 6 - 2

1. $P = 3\,500$

$$i = 0,075$$

$$n = 2$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 3\,500(1 + 0,075)^2$$

$$A = R\,4\,044,69$$

2. $A = 7\,500$

$$P = 5\,000$$

$$i = ?$$

$$n = 5$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$7\,500 = 5\,000(1 + i)^5$$

$$\frac{7\,500}{5\,000} = (1 + i)^5$$

$$\sqrt[5]{\frac{7\,500}{5\,000}} = (1 + i)$$

$$\sqrt[5]{\frac{7\,500}{5\,000}} - 1 = i$$

$$i = 0,0844717712$$

rentekoers is 8,45% p.a

3. $A = 100\,000$

$$P = ?$$

$$i = 0,11$$

$$n = 5$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$100\,000 = P(1 + 0,11)^5$$

$$\frac{100\,000}{(1,11)^5} = P$$

$$P = R\,59\,345,13$$

Oefening 6 - 3

1. Vanessa wil 'n yskas op huurkoop koop. Die kontantprys is R 4 500. Sy moet 'n deposito van 15% betaal en die oorblywende bedrag oor 24 maande teen 'n rentekoers van 12% p.a.

(a) Wat is die aanvangsbedrag (hoofsom)?

(b) Wat is die eindbedrag wat sy terugbetaal?

- (c) Wat is Vanessa se maandelikse paaielemente?
- (d) Hoeveel het Vanessa in totaal vir haar yskas betaal?
2. Bongani koop 'n eetkamertafel van R 8 500 op huurkoop. Hy moet enkelvoudige rente van 17,5% per jaar betaal oor 3 jaar.
- (a) Hoeveel sal Bongani in totaal betaal?
- (b) Hoeveel rente betaal hy?
- (c) Wat is sy maandelikse paaielement?
3. 'n Sitkamerstel word geadverteer op TV. Dit moet oor 36 maande terugbetaal word teen R 150 'n maand.
- (a) Aanvaar daar is geen deposito nodig nie, hoeveel sal die koper betaal vir die stel teen die tyd wat dit afbetaal is?
- (b) As die rentekoers 9% p.a is, wat is die konstantprys van die stel?

Oplossings vir Oefening 6 - 3

1. (a) $P = 4\,500 - (4\,500 \times 0,15)$
 $= 4\,500 - 675$
 $= R\,3\,825$
- (b) $P = R\,3\,825$
 $i = 0,12$
 $n = \frac{24}{12} = 2$
- (c) $A = P(1 + in)$
 $A = 3\,825(1 + (0,12)(2))$
 $A = R\,4\,743$
- (d) $\frac{4\,743}{24} = R\,197,63$
- (d) $675 + 4743 = R\,5\,418$
2. (a) $A = ?$
 $P = 8\,500$
 $i = 0,175$
 $n = 3$
 $A = P(1 + in)$
- $A = 8\,500(1 + (0,175)(3))$
 $A = R\,12\,962,50$
- (b) $12\,962,50 - 8\,500 = R\,4\,462,50$
- (c) $\frac{12\,962,50}{36} = R\,360,07$
- 3.(a) $36 \times 150 = R\,5\,400$
- (b) $A = 5\,400$
 $P = ?$
 $i = 0,09$
 $n = 3$
- $A = P(1 + in)$
 $5\,400 = P(1 + (0,09)(3))$
 $\frac{5\,400}{1,27} = P$
 $P = R\,4\,251,97$

Oefening 6 - 4

1. Die gemiddelde inflasiekoers vir die afgelope aantal jaar is 7,3% per jaar en jou water- en elektrisiteitsrekening is gemiddeld R 1 425. Bereken wat jy kan verwag om te betaal oor 6 jaar?
2. Die prys van springmielies en koeldrank by die fliek is nou R 60. As die gemiddelde inflasie 9,2% is, wat was die prys 5 jaar gelede?
3. 'n Klien dorpie in Ohio, VSA, ondervind 'n groot toename in geboortes. As die gemiddelde groeikoers van die bevolking 16% p.a, hoeveel babas sal gebore word vir die 1600 inwoners in die volgende 2 jaar?

Oplossings vir Oefening 6 - 4

1. $A = ?$

$$P = 1\,425$$

$$i = 0,073$$

$$n = 6$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 1\,425(1 + 0,073)^6$$

$$A = R\,2\,174,77$$

2. $A = R\,60$

$$P = ?$$

$$i = 0,092$$

$$n = 5$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$60 = P(1 + 0,092)^5$$

$$\frac{60}{(1,092)^5} = P$$

$$P = R\,38,64$$

3. $A = ?$

$$P = 1\,600$$

$$i = 0,16$$

$$n = 2$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 1\,600(1 + 0,16)^2$$

$$A = 2\,152,96$$

$$2\,153 - 1\,600 = 553$$

Daar sal ongeveer 553 babas in die volgende twee jare gebore wees.

Oefening 6 - 5

1. Bridget wil 'n iPod koop wat £ 100 kos, en die huidige wisselkoers is £ 1 = R 14. Sy glo die wisselkoers gaan verander na R 12 binne 'n maand.

- (a) Hoeveel sal die iPod speler in Rand kos as ek dit nou koop?
 (b) Hoeveel sal sy spaar as die wisselkoers daal na R 12?
 (c) Hoeveel sal sy verloor as die wisselkoers verander na R 15?
2. Bestudeer die volgende tabel met wisselkoerse:

Land	Geldeenheid	Wisselkoers
Verenigde Koninkryk(VK)	Ponde (£)	R 14,13
Amerika (VSA)	Dollars (\$)	R 7,04

- (a) In Suid-Afrika is die koste van 'n nuwe Honda Civic R 173 400. In Engeland kos dieselfde voertuig £ 12 200 en in die \$ 21 900. In watter land is die voertuig die goedkoopste as jy die pryse omskakel na Suid-Afrikaanse Rand ?
 (b) Sollie en Arinda is kelners in 'n Suid-Afrikaanse restaurant wat baie oorsese toeriste lok. Sollie kry 'n £ 6 footjie van 'n toeris en Arinda kry \$ 12. Hoeveel Suid-Afrikaanse Rand het elkeen gekry?

Oplossings vir Oefening 6 - 5

- 1.(a) Rand koste = (Pond koste) $\times$ wisselkoers
 $\text{Rand koste} = 100 \times \frac{14}{1} = \text{R } 1\,400$
 (b) Rand koste = $100 \times \frac{12}{1} = \text{R } 1\,200$
 Dus sal sy R 200 spaar (Besparing = R 1 400 – R 1 200)
 (c) Rand koste = $100 \times \frac{15}{1} = \text{R } 1\,500$
 Dus sal sy R 100 verloor (Verloor = R 1 400 – R 1 500)
- 2.(a) Om hierdie vraag te beantwoord, bereken ons die koste van die motor in Rand vir elke land, en dan die drie antwoorde vergelyk om te sien watter die goedkoopste is. Rand koste = geldeenheid koste $\times$ wisselkoers .
 Koste in VK: $12\,200 \times \frac{14,13}{1} = \text{R } 172\,386$
 Koste in VSA: $21\,900 \times \frac{7,04}{1} = \text{R } 154\,400$
 Deur vergelyking van die drie koste sien ons dat die kar die goedkoopste in die VSA is.
 (b) Sollie: $6 \times \frac{14,31}{1} = \text{R } 84,78$
 Arinda: $12 \times \frac{7,04}{1} = \text{R } 84,48$.

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Alison is met vakansie in Europa. Haar hotel vra € 200 euro per nag. Hoeveel Rand het sy nodig om die hotelrekening te betaal as die wisselkoers € 1 = R 9,20?
 2. Bereken hoeveel rente jy sal verdien as jy R 500 vir 1 jaar belê teen die volgende rentekoerse:
 (a) 6,85% enkelvoudige rente.
 (b) 4,00% saamgetelde rente.

3. Bianca het R 1 450 om vir 3 jaar te belê. Bank A bied 'n spaarrekening aan wat enkelvoudige rente betaal teen 'n koers van 11% per annum. Bank B bied 'n spaarrekening aan wat saamgestelde rente betaal teen 'n koers van 10,5% per annum. Watter bank gaan vir Bianca die spaarrekening gee met die grootste opgeloopte bedrag aan die einde van die 3 jaar?
4. Hoeveel enkelvoudige rente is betaalbaar op 'n lening van R 2 000 vir 'n jaar indien die rentekoers 10% per jaar is?
5. Hoeveel saamgestelde rente is betaalbaar op 'n lening van R 2 000 vir 'n jaar indien die rentekoers 10% per jaar is?
6. Bespreek:
 - (a) watter soort rente jy sal verkies as jy die lener is?
 - (b) watter soort rente jy sal verkies as jy die bankier is?
7. Bereken die saamgestelde rente vir die volgende probleme.
 - (a) 'n lening van R 2 000 vir 2 jaar teen 5% per jaar
 - (b) 'n belegging van R 1 500 vir 3 jaar teen 6% per jaar
 - (c) 'n lening van R 800 vir 1 jaar teen 16% per jaar
8. As die wisselkoers vir ¥ 100 = R 6,2287 (¥ = Yen) en 1 Australiese dollar (AUD) = R 5,1094, bepaal die wisselkoers tussen die Australiese dollar en die Japanse jen.
9. Bonnie het 'n stoof gekoop vir R 3 750. Na 3 jaar het sy dit klaar betaal, asook die R 956,25 huurkoopkoste. Bereken die koers waarteen enkelvoudige rente bereken is.
10. Volgens die nuutste sensus, het Suid-Afrika 'n bevolking van 57 000 000.
 - (a) Indien die jaarlikse groeikoers 0,9% verwag word, bereken hoeveel Suid-Afkaners daar in 10 jaar sal wees (korrek tot die naaste honderd duisend).
 - (b) As na 10 jaar word dit gevind dat die bevolking eintlik by 10 miljoen tot by 67 miljoen gegroei het, wat was die groeikoers?

Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Rand koste} &= \text{Euro koste} \times \text{wisselkoers} \\
 &= 200 \times 9,201 \\
 &= \text{R } 1\,840
 \end{aligned}$$

$$2.(a) \ P = 500$$

$$i = 0,685$$

$$n = 1$$

$$A = ?$$

$$A = P(1 + in)$$

$$A = 500(1 + (0,685)(1))$$

$$A = 500(1,685)$$

$$A = \text{R } 534,25$$

$$(b) \ P = 500$$

$$i = 0,04$$

$$n = 1$$

$$A = ?$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 500(1 + 0,04)^1$$

$$A = \text{R } 520$$

$$3. \text{ Bank A:}$$

$$P = 1\,450$$

$$i = 0,11$$

$$n = 3$$

$$A = ?$$

$$A = P(1 + in)$$

$$A = 1\,450(1 + (0,11)(3))$$

$$A = 1\,450(1,33)$$

$$A = R\,1\,925,50$$

Bank B:

$$P = 1\,450$$

$$i = 0,150$$

$$n = 3$$

$$A = ?$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 1\,450(1 + 0,150)^3$$

$$A = R\,1\,956,39$$

Sy moet Bank B kies as dit sal haar meer geld oor 3 jaar verdien.

4. $P = 2\,000$

$$i = 0,10$$

$$n = 1$$

$$A = ?$$

$$A = P(1 + in)$$

$$A = 2\,000(1 + (0,10)(1))$$

$$A = 2\,000(1,10)$$

$$A = R\,2\,200$$

Dus is die bedrag rentekoers:

$$2\,200 - 2\,000 = R\,200$$

5. $P = 2\,000$

$$i = 0,10$$

$$n = 1$$

$$A = ?$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 2\,000(1 + 0,10)^1$$

$$A = R\,2\,200$$

Dus is die bedrag rentekoers:

$$2\,200 - 2\,000 = R\,200$$

6.(a) Enkelvoudige rente. Rente is op die hoofsom en nie op die rente verdien gedurende die vorige tydperke bereken. Dit sal lei tot die lener om minder rente moet betaal.

(b) Saamgestelde rente. Rente is vanaf die prinsipale bedrag bereken sowel as rente verdien uit vorige tydperke. Dit sal lei tot die bankier om meer geld vir die bank te verdien.

7.(a) $P = 2\,000$

$$i = 0,05$$

$$n = 2$$

$$A = ?$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 2\,000(1 + 0,05)^2$$

$$A = R\,2\,205$$

Dus is die bedrag rentekoers:

$$2\,205 - 2\,000 = R\,205$$

(b) $P = 1\,500$

$$i = 0,06$$

$$n = 3$$

$$A = ?$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 1\,500(1 + 0,06)^3$$

$$A = R\,1\,786,524$$

Dus is die bedrag rentekoers:

$$1\,786,524 - 1\,500 = R\,286,52$$

(c) $P = 800$

$$i = 0,16$$

$$n = 1$$

$$A = ?$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$A = 800(1 + 0,16)^1$$

$$A = R\,928$$

Dus is die bedrag rentekoers:

$$928 - 800 = R\,128$$

8. $\frac{\text{AUD}}{\text{Yen}} = \frac{\text{ZAR}}{\text{Yen}} \times \frac{\text{AUD}}{\text{Yen}}$
 $= \frac{6,2287}{100} \times 15,1094$
 $= \frac{0,01219}{0,00219} \text{ AUD}$
 $= 1 \text{ Yen}$
 or $1 \text{ AUD} = 82,03 \text{ Yen}$

9. Totale bedrag $= 3\,750 + 956,25 = 4\,706,25$

$$P = 3\,750$$

$$i = ?$$

$$n = 3$$

$$A = 4\,706,25$$

$$A = P(1 + in)$$

$$4\,706,25 = 3\,750(1 + i(3))$$

$$1,255 = (1 + 3i)$$

$$0,255 = 3i$$

$$i = 0,085$$

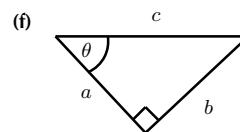
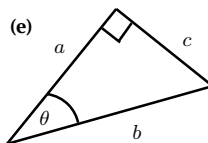
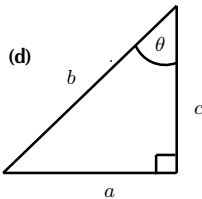
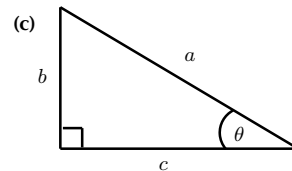
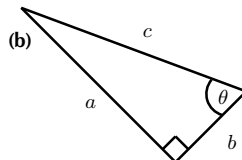
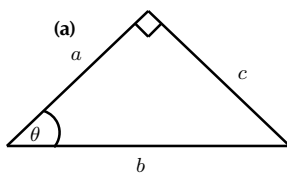
Dus is die bedrag rentekoers 8,5%

10.(a) $A = 57\,000\,000(1 + \frac{0,9}{100})^{10}$
 $= 57\,000\,000(1,009)^{10}$
 $= 57\,000\,000(1,0937)^{10}$
 $= 62,3 \text{ miljoen mense}$

(b) $67 = 57(1 + \frac{i}{100})^{10}$
 $\sqrt[10]{\frac{67}{57}} = 1 + \frac{i}{100}$
 $\frac{i}{100} = 1,01629 - 1$
 $i = 100(0,016)$
 $i = 1,69$
 $i \approx 1,7\%$

Oefening 7 - 1

1. In elk van die volgende driehoeke, dui aan watter van a , b en c is die skuinssy, die teenoorstaande sy en die aangrensende sy van die driehoek ten opsigte van θ .



2. Gebruik jou sakrekenaar om die waardes van die volgende te bepaal (korrek tot 2 desimale plekke):

(a) $\tan 65^\circ$

(b) $\sin 38^\circ$

(c) $\cos 74^\circ$

(d) $\sin 12^\circ$

(e) $\cos 26^\circ$

(f) $\tan 49^\circ$

(g) $\frac{1}{4} \cos 20^\circ$

(h) $3 \tan 40^\circ$

(i) $\frac{2}{3} \sin 90^\circ$

3. As $x = 39^\circ$ en $y = 21^\circ$ is, gebruik 'n sakrekenaar om te bepaal of die volgende waar of vals is:

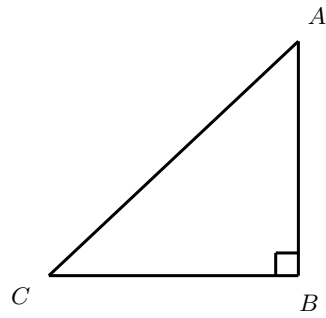
(a) $\cos x + 2 \cos x = 3 \cos x$

(b) $\cos 2y = \cos y + \cos y$

(c) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

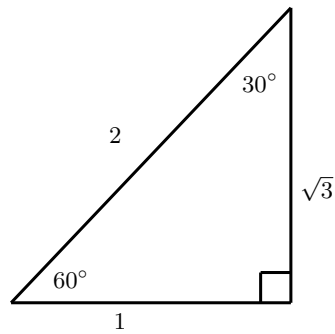
(d) $\cos (x + y) = \cos x + \cos y$

4. Voltooi elk van die volgende (die eerste voorbeeld is klaar gedoen):



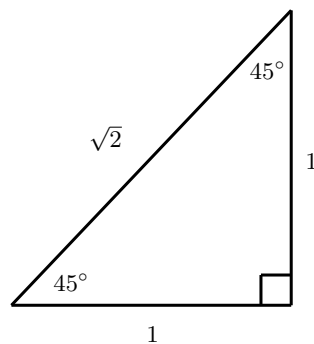
- (a) $\sin \hat{A} = \frac{\text{teenoorstaand}}{\text{skuinssy}} = \frac{CB}{AC}$ (d) $\sin \hat{C} =$
 (b) $\cos \hat{A} =$ (e) $\cos \hat{C} =$
 (c) $\tan \hat{A} =$ (f) $\tan \hat{C} =$

5. Gebruik die driehoek hieronder om die volgende te voltooi:



- (a) $\sin 60^\circ =$ (d) $\sin 30^\circ =$
 (b) $\cos 60^\circ =$ (e) $\cos 30^\circ =$
 (c) $\tan 60^\circ =$ (f) $\tan 30^\circ =$

6. Gebruik die driehoek hieronder om die volgende te voltooi:



- (a) $\sin 45^\circ =$
 (b) $\cos 45^\circ =$
 (c) $\tan 45^\circ =$

Oplossings vir Oefening 7 - 1

- 1.(a) $a = \text{aangr}; b = \text{skuins}; c = \text{teen}$
 (b) $a = \text{teen}; b = \text{aangr}; c = \text{skuins}$
 (c) $a = \text{skuins}; b = \text{teen}; c = \text{aangr}$
 (d) $a = \text{teen}; b = \text{skuins}; c = \text{aangr}$
 (e) $a = \text{aangr}; b = \text{skuins}; c = \text{teen}$
 (f) $a = \text{aangr}; b = \text{teen}; c = \text{skuins}$
- 2.(a) 2,14
 (b) 0,62
 (c) 0,28
 (d) 0,21
 (e) 0,90
 (f) 1,15
 (g) 0,23
 (h) 2,52
 (i) 0,67
- 3.(a) $LK = \cos 39^\circ + 2 \cos 39^\circ$
 $= 2,33$
 $RK = 3 \cos 39^\circ$
 $= 2,33$
 $LK = RK$, dus stelling is waar.
 (b) $LK = \cos 2(21^\circ)$
 $= 0,74$
 $RK = \cos 21^\circ + \cos 21^\circ$
 $= 1,87$
 $LK \neq RK$, dus stelling is vals.
 (c) $LK = \tan 39^\circ$
 $= 0,81$
 $RK = \frac{\sin 39^\circ}{\cos 39^\circ}$
 $= 0,81$
 $LK = RK$, dus stelling is waar.
 (d) $LK = \cos (39^\circ + 21^\circ)$
 $= 0,5$
 $RK = \cos 39^\circ + \cos 21^\circ$
 $= 1,71$
 $LK \neq RK$, dus stelling is vals.
- 4.(a) $\sin \hat{A} = \frac{CB}{AC}$
 (b) $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$
 (c) $\tan \hat{A} = \frac{CB}{AB}$
 (d) $\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC}$
 (e) $\cos \hat{C} = \frac{CB}{AC}$
 (f) $\tan \hat{C} = \frac{AB}{CB}$
- 5.(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (b) $\frac{1}{2}$
 (c) $\sqrt{3}$
 (d) $\frac{1}{2}$
 (e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- 6.

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) 1

Oefening 7 - 2

1. Bereken die volgende sonder 'n sakrekenaar:

(a) $\sin 45^\circ \times \cos 45^\circ$
 (b) $\cos 60^\circ + \tan 45^\circ$
 (c) $\sin 60^\circ - \cos 60^\circ$

2. Gebruik die tabel hierbo om aan te dui dat:

(a) $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \tan 60^\circ$
 (b) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$
 (c) $\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ}$

3. Gebruik die definisies van die trigonometriese verhoudings om die volgende vrae te beantwoord:

- (a) Verduidelik hoekom $\sin \alpha \leq 1$ is vir alle α .
 (b) Verduidelik hoekom $\cos \beta$ 'n maksimum waarde van 1 het.
 (c) Is daar 'n maksimum vir $\tan \gamma$?

Oplossings vir Oefening 7 - 2

1.(a) $\sin 45^\circ \times \cos 45^\circ$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{1}{2}$

(b) $\cos 60^\circ + \tan 45^\circ$
 $= \frac{1}{2} + 1$

2.(a) $LK = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$
 $= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1}$
 $= \sqrt{3}$
 $RK = \tan 60^\circ$
 $= \sqrt{3}$
 Dus $LK = RK$.

$= 1\frac{1}{2}$

(c) $\sin 60^\circ - \cos 60^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$
 $= \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(b) $LK = \sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$
 $= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 $= 1$
 $RK = 1$
 Dus $LK = RK$.

(c) $LK = \cos 30^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $RK = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ}$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}$$

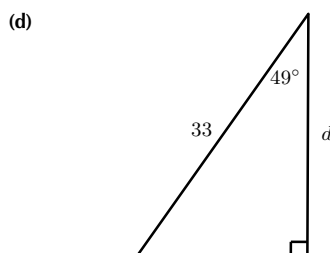
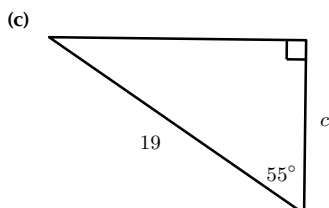
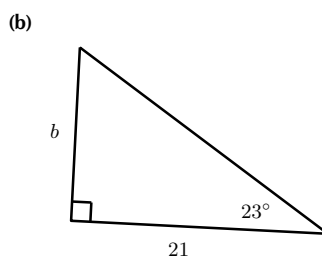
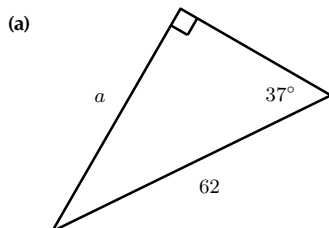
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

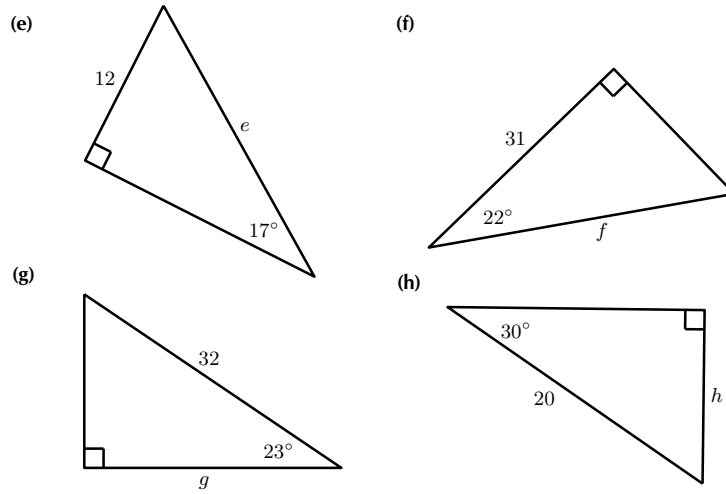
Dus $LK=RK$.

- 3.(a) Die sinus verhouding word gedefinieer as $\frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}}$. In enige reghoekige driehoek, is die skuinssy die sy met die langste lengte. Dus die maksimum lengte van die teenoorstaande sy is gelyk aan die lengte van die skuinssy. Die maksimum waarde van die sinus verhouding is dan $\frac{\text{skuinssy}}{\text{skuinssy}} = 1$.
- (b) Soortgelyk, die cosinus verhouding word gedefinieer as $\frac{\text{aangrensende sy}}{\text{skuinssy}}$. In enige reghoekige driehoek, is die skuinssy die sy met die langste lengte. Dus die maksimum lengte van die aangrensende sy is gelyk aan die lengte van die skuinssy. Die maksimum waarde van die cosinus verhouding is dan $\frac{\text{skuinssy}}{\text{skuinssy}} = 1$.
- (c) Vir die tangens verhouding $\frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$, daar is geen maksimum waarde. Let wel dat daar 'n beperking is; die verhouding is ongedefinieerd as die lengte van die aangrensende sy gelyk aan 0 is.

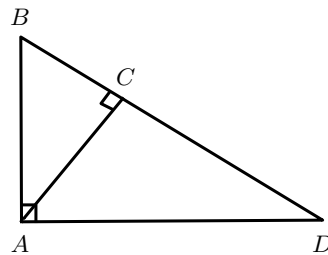
Oefening 7 - 3

1. Vir elke driehoek, bereken die lengte van die sy met 'n letter gemerk. Gee die antwoorde korrek tot 2 desimale plekke.





2. Skryf twee verhoudings neer in terme van die sye vir elk van die volgende: AB ; BC ; BD ; AD ; DC and AC



- (a) $\sin \hat{B}$
 (b) $\cos \hat{D}$
 (c) $\tan \hat{B}$

3. In $\triangle MNP$, $\hat{N} = 90^\circ$, $MP = 20$ cm en $\hat{P} = 40^\circ$. Bereken NP en MN (korrek tot 2 desimale plekke).

Oplossings vir Oefening 7 - 3

- 1.(a) $\sin 37^\circ = \frac{a}{62}$
 $a = 62 \times \sin 37^\circ$
 $a = 37,31$ eenhede
 (b) $\tan 23^\circ = \frac{b}{21}$
 $b = 21 \times \tan 23^\circ$
 $b = 8,91$ eenhede
 (c) $\cos 55^\circ = \frac{c}{19}$
 $c = 19 \times \cos 55^\circ$
 $c = 10,90$ eenhede
 (d) $\cos 49^\circ = \frac{d}{33}$

- $d = 33 \times \cos 49^\circ$
 $d = 21,65$ eenhede
 (e) $\sin 17^\circ = \frac{12}{e}$
 $e = \frac{12}{\sin 17^\circ}$
 $e = 41,04$ eenhede
 (f) $\cos 22^\circ = \frac{31}{f}$
 $f = \frac{31}{\cos 22^\circ}$
 $f = 33,43$ eenhede
 (g) $\cos 23^\circ = \frac{g}{32}$
 $g = 32 \times \cos 23^\circ$

$$g = 29,46 \text{ eenhede}$$

$$(h) \sin 30^\circ = \frac{h}{20}$$

$$h = 20 \times \sin 30^\circ$$

$$h = 10,00 \text{ eenhede}$$

$$2.(a) \sin \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD}$$

$$(b) \cos \hat{D} = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$

$$(c) \tan \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

$$3. \sin \hat{P} = \frac{MN}{MP}$$

$$\sin 40^\circ = \frac{MN}{20}$$

$$\therefore MN = 20 \sin 40^\circ$$

$$= 12,86 \text{ eenhede}$$

$$\cos \hat{P} = \frac{NP}{MP}$$

$$\cos 40^\circ = \frac{NP}{20}$$

$$\therefore NP = 20 \cos 40^\circ$$

$$= 15,32 \text{ eenhede}$$

Oefening 7 - 4

1. Bepaal die hoek (korrek tot 1 desimale plek):

$$(a) \tan \theta = 1,7$$

$$(b) \sin \theta = 0,8$$

$$(c) \cos \alpha = 0,32$$

$$(d) \tan \theta = 5\frac{3}{4}$$

$$(e) \sin \theta = \frac{2}{3}$$

$$(f) \cos \gamma = 1,2$$

$$(g) 4 \cos \theta = 3$$

$$(h) \cos 4\theta = 0,3$$

$$(i) \sin \beta + 2 = 2,65$$

$$(j) \sin \theta = 0,8$$

$$(k) 3 \tan \beta = 1$$

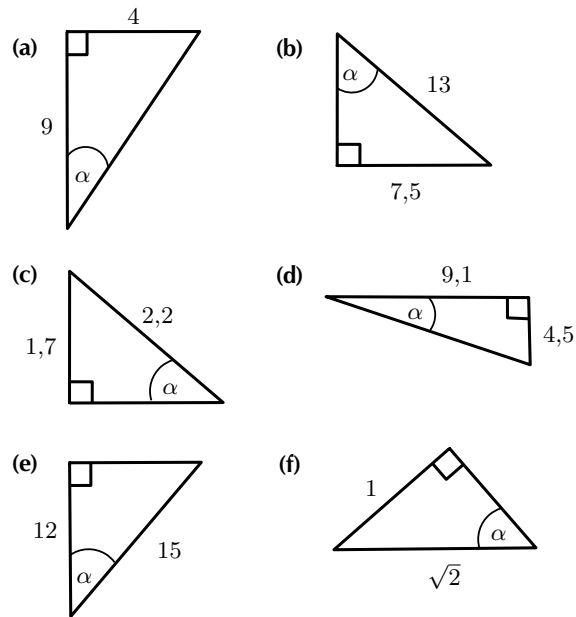
$$(l) \sin 3\alpha = 1,2$$

$$(m) \tan\left(\frac{\theta}{3}\right) = \sin 48^\circ$$

$$(n) \frac{1}{2} \cos 2\beta = 0,3$$

$$(o) 2 \sin 3\theta + 1 = 2,6$$

2. Bepaal α in die volgende reghoekige driehoeke:



Oplossings vir Oefening 7 - 4

- | | |
|--|---|
| 1.(a) $\theta = 59,5^\circ$ | (i) $\theta = 40,5^\circ$ |
| (b) $\theta = 53,1^\circ$ | (j) $\theta = 53,1^\circ$ |
| (c) $\theta = 71,3^\circ$ | (k) $\theta = 18,4^\circ$ |
| (d) $\theta = 80,1^\circ$ | (l) Geen oplossing |
| (e) $\theta = 41,8^\circ$ | (m) $\theta = 109,8^\circ$ |
| (f) Geen oplossing | (n) $\theta = 26,6^\circ$ |
| (g) $\theta = 41,4^\circ$ | (o) $\theta = 17,7^\circ$ |
| (h) $\theta = 18,1^\circ$ | |
| 2.(a) $\tan \alpha = \frac{4}{9} = 24,0^\circ$ | (d) $\tan \alpha = \frac{4,5}{9,1} = 26,3^\circ$ |
| (b) $\sin \alpha = \frac{7,5}{13} = 35,2^\circ$ | (e) $\cos \alpha = \frac{12}{15} = 37,0^\circ$ |
| (c) $\sin \alpha = \frac{1,7}{2,2} = 50,6^\circ$ | (f) $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = 45,0^\circ$ |

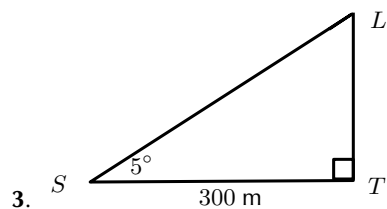
Oefening 7 - 5

1. 'n Seun wat 'n vlieër vlieg staan 30 m vanaf 'n punt direk onder die vlieër. As die vlieër se tou 50 m lank is, vind die hoogtehoek van die vlieër.
2. Wat is die hoogtehoek van die son as 'n boom, wat 7,15 m hoog is, 'n skaduwee van 10,1 m gooi?
3. Vanaf 'n afstand van 300 m kyk Susan op na die bopunt van 'n vuurtoring teen 'n hoogtehoek van 5° . Bepaal die hoogte van die vuurtoring tot die naaste meter.

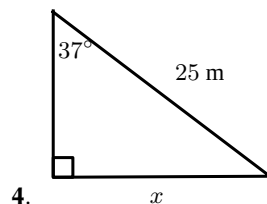
4. 'n Leer met lengte 25 m rus teen 'n muur teen 'n hoek van 37° . Vind die afstand tussen die muur en die onderpunt van die leer.

Oplossings vir Oefening 7 - 5

1. $\cos x = \frac{30}{50}$
 $\therefore x = 53,13^\circ$
2. $\tan x = \frac{7,15}{10,1}$
 $\therefore x = 35,3^\circ$



$$\begin{aligned} \text{In } \triangle LTS \\ \tan \hat{S} &= \frac{LT}{ST} \\ \therefore LT &= 300 \tan 5^\circ \\ &= 26 \text{ m} \end{aligned}$$

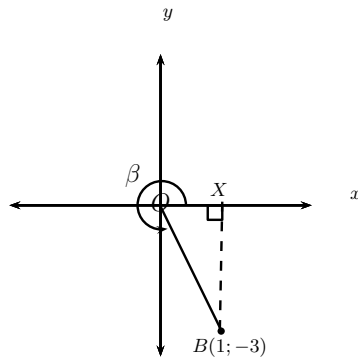


$$\begin{aligned} \sin 37^\circ &= \frac{x}{25} \\ x &= 25 \sin 37^\circ \\ x &= 15 \text{ m} \end{aligned}$$

Oefening 7 - 6

Let wel: Maak altyd 'n skets wanneer jy trigonometriese probleme sonder 'n sakrekenaar moet oplos.

1. B is die punt $(-7; -24)$ in die Cartesiese vlak. Bepaal sonder 'n rekenaar:
 - (a) Die lengte van OB
 - (b) $\cos \beta$
 - (c) $\operatorname{cosec} \beta$
 - (d) $\tan \beta$



2. As $\sin \theta = 0,4$ en θ is 'n stomphoek, bepaal:

(a) $\cos \theta$

(b) $\sqrt{21} \tan \theta$

3. Gegee $\tan \theta = \frac{t}{2}$, waar $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Bepaal die volgende in terme van t :

(a) $\sec \theta$

(b) $\cot \theta$

(c) $\cos^2 \theta$

(d) $\tan^2 \theta - \sec^2 \theta$

Oplossings vir Oefening 7 - 6

1.(a) In $\triangle BOX$

$$OB^2 = OX^2 + XB^2$$

$$OB^2 = 1^2 + 3^2$$

$$OB = \sqrt{10} \text{ eenhede}$$

(b) $\cos \beta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

(c) $\operatorname{cosec} \beta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{10}}{-3}$

(d) $\tan \beta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{1} = -3$

2. $\sin \theta = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$$\therefore y = 2; r = 5$$

$$\therefore x^2 = r^2 - y^2$$

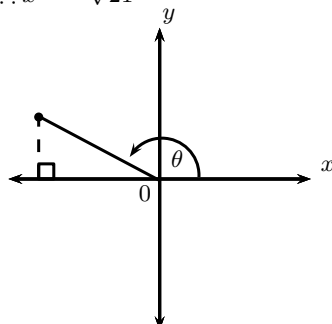
$$= 5^2 - 2^2$$

$$= 21$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{21}$$

maar hoek is in kwadrant III, dus is x negatief

$$\therefore x = -\sqrt{21}$$



(a) $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{21}}{5}$

(b) $\sqrt{21} \tan \theta = \sqrt{21} \left(\frac{y}{x} \right) = \sqrt{21} \left(\frac{2}{-\sqrt{21}} \right) = -2$

3.(a) $\sec \theta = \frac{\sqrt{t^2+4}}{2}$

(b) $\cot \theta = \frac{2}{t}$

(c) $\cos^2 \theta = \left(\frac{2}{\sqrt{t^2+4}} \right)^2 = \frac{4}{t^2+4}$

(d) $\tan^2 \theta - \sec^2 \theta$
 $= \frac{t^2}{4} - \left(\frac{\sqrt{t^2+4}}{2} \right)^2$
 $= \frac{t^2}{4} - \left(\frac{t^2+4}{4} \right)$
 $= \frac{t^2-t^2-4}{4}$
 $= -1$

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bepaal die waarde van

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ + \tan 45^\circ$$

2. As $3 \tan \alpha = -5$ en $0^\circ < \alpha < 270^\circ$, gebruik 'n skets om te bepaal:

(a) $\cos \alpha$

(b) $\tan^2 \alpha - \sec^2 \alpha$

3. Los op vir θ as θ 'n positiewe skerphoek is:

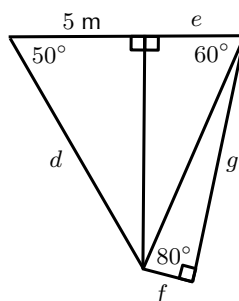
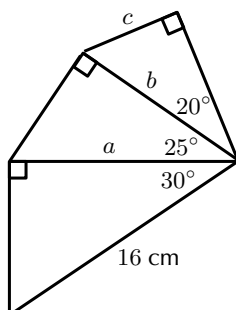
(a) $2 \sin \theta = 1,34$

(b) $1 - \tan \theta = -1$

(c) $\cos 2\theta = \sin 40^\circ$

(d) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$

4. Bereken die onbekende sylengtes in die diagramme hieronder:



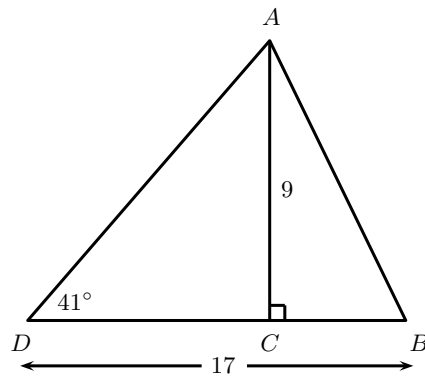
5. In $\triangle PQR$, $PR = 20$ cm, $QR = 22$ cm and $\hat{P}RQ = 30^\circ$. Die loodlyn vanaf P na QR kruis QR by X . Bereken:

(a) die lengte XR

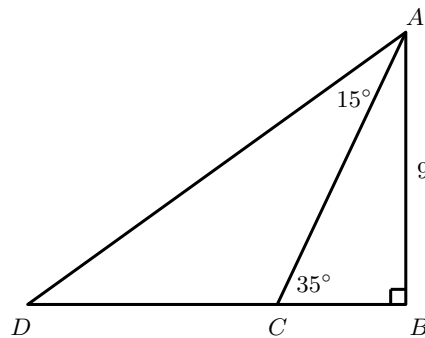
(b) die lengte PX

(c) die hoek $\hat{Q}PX$

6. 'n Leer met lengte 15 m rus teen 'n muur. Die voet van die leer is 5 m van die muur. Vind die hoek tussen die muur en die leer.
7. In die volgende driehoek, vind hoek $\hat{A}BC$:



8. In die volgende driehoek, vind die lengte van sy CD :



9. Gegee $A(5; 0)$ en $B(11; 4)$, vind die hoek tussen die x -as en die lyn deur A en B .
10. Gegee $C(0; -13)$ en $D(-12; 14)$, vind die hoek tussen die lyn deur C en D en die y -as.
11. 'n Reghoekige driehoek het 'n skuinssy van 13 mm. Vind die lengte van die ander twee sye as een van die hoeke van die driehoek 50° is.
12. Een van die hoeke van 'n rombus met omtrek 20 cm is 30° .
- Vind die sylengte van die rombus.
 - Vind die lengtes van beide diagonale.
13. Kaptein Jack seil na 'n krans met 'n hoogte van 10 m.
- As die afstand vanaf die boot na die bokant van die krans 30 m is, bereken die hoogtehoek vanaf die boot na die bokant van die krans (korrek tot tot die naaste heelgetal).
 - As die boot 7 m nader aan die krans seil, wat is die nuwe hoogtehoek vanaf die boot na die bokant van die krans?
14. Gegee die punte $E(5; 0)$; $F(6; 2)$ en $G(8; -2)$, vind die hoek $\hat{F}EG$.
15. 'n Driehoek met hoeke 40° ; 40° en 100° het 'n omtrek van 20 cm. Vind die lengte van elke sy van die driehoek.

Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge

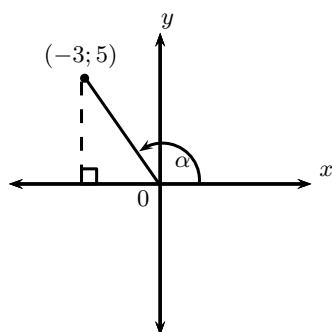
$$1. \sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ + \tan 45^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) + 1$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \frac{2}{4} + 1$$

$$= 1\frac{1}{2}$$



2.

$$3 \tan \alpha = -5$$

$$\tan \alpha = \frac{-5}{3}$$

$$\therefore x = -3; y = 5$$

$$\therefore r^2 = x^2 + y^2$$

$$= (-3)^2 + (5)^2$$

$$= 34$$

$$\therefore r = \sqrt{34}$$

$$(a) \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{34}}$$

$$\begin{aligned} (b) \tan^2 \alpha - \sec^2 \alpha &= \left(\frac{y}{x} \right)^2 - \left(\frac{r}{x} \right)^2 \\ &= \left(\frac{5}{-3} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{34}}{-3} \right)^2 \\ &= \frac{25}{9} - \frac{34}{9} \\ &= \frac{-9}{9} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$3.(a) 2 \sin \theta = 1,34$$

$$\sin \theta = \frac{1,34}{2}$$

$$\therefore \theta = 42,07^\circ$$

$$(b) 1 - \tan \theta = -1$$

$$-\tan \theta = -2$$

$$\tan \theta = 2$$

$$\therefore \theta = 63,43^\circ$$

$$(c) \cos 2\theta = \sin 40^\circ$$

$$\cos 2\theta = 0,64$$

$$2\theta = 50^\circ$$

$$\theta = 25^\circ$$

$$(d) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$$

$$\therefore \tan \theta = 1$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

$$4.(a) \cos 30^\circ = \frac{a}{16}$$

$$a = 16 \cos 30^\circ$$

$$a = 13,86 \text{ cm}$$

$$(c) \sin 20^\circ = \frac{c}{12,56}$$

$$\therefore c = 4,30 \text{ cm}$$

$$(d) \cos 50^\circ = \frac{5}{d}$$

$$\therefore d = 7,78 \text{ cm}$$

$$(b) \cos 25^\circ = \frac{b}{13,86}$$

$$\therefore b = 12,56 \text{ cm}$$

(e) By Pythagoras is die derde sy

$$\sqrt{5^2 + 7,779^2} = 9,246 \text{ cm}$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{9,247}{e}$$

$$\therefore e = 5,34 \text{ cm}$$

(f) By Pythagoras is die derde sy

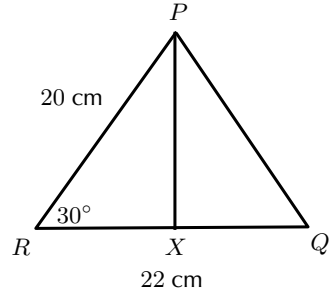
$$\sqrt{5,339^2 + 7,779^2} = 9,435 \text{ cm}$$

$$\therefore f = \sqrt{9,345^2 - 1,648^2} = 9,2 \text{ cm}$$

$$(g) \tan 80^\circ = \frac{9,435}{g}$$

$$\therefore g = 1,65 \text{ cm}$$

5. Eerstens, teken 'n skets:



$$(a) \cos 30^\circ = \frac{XR}{20}$$

$$XR = 20 \cos 30^\circ$$

$$XR = 17,32 \text{ cm}$$

$$(b) \sin 30^\circ = \frac{PX}{20}$$

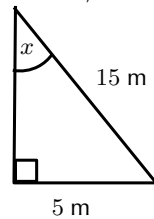
$$PX = 20 \sin 30^\circ$$

$$PX = 10 \text{ cm}$$

$$(c) \tan Q\hat{P}X = \frac{4,68}{10}$$

$$Q\hat{P}X = 25,08^\circ$$

6. Eerstens, teken 'n skets:



$$\sin x = \frac{5}{15}$$

$$\therefore x = 19,47^\circ$$

$$7. \tan 41^\circ = \frac{9}{DC}$$

$$DC = \frac{9}{\tan 41^\circ}$$

$$= 10,35 \text{ eenhede } BC = BD - DC = 6,65 \text{ eenhede } \tan A\hat{B}C = \frac{9}{6,65}$$

$$8. C\hat{A}B = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

$$\therefore D\hat{A}B = 15^\circ + 55^\circ = 70^\circ$$

$$\tan 35^\circ = \frac{9}{BC}$$

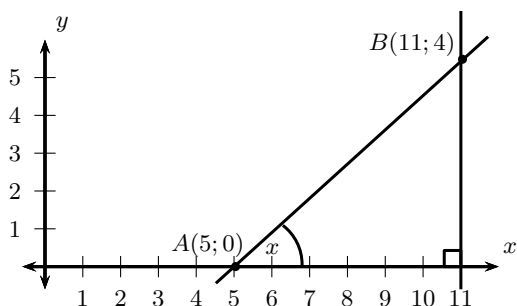
$$\therefore BC = 12,85 \text{ eenhede}$$

$$\tan 70^\circ = \frac{BD}{9}$$

$$BD = 24,73 \text{ eenhede}$$

$$CD = BD - BC = 11,88 \text{ eenhede}$$

9. Eerstens, teken 'n skets:

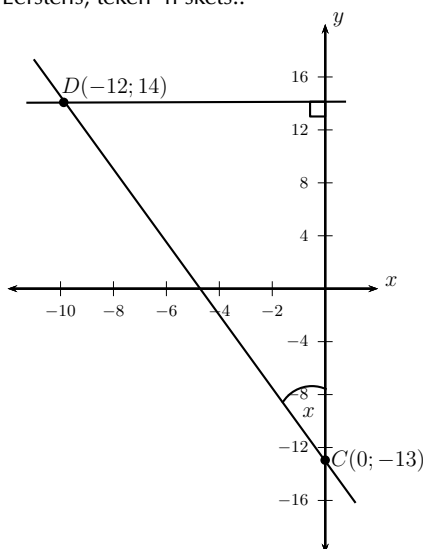


Let op dat die afstande van B af tot die x -as 4 eenhede is, en dat die afstand AC is $11 - 5 = 6$ eenhede.

$$\tan x = \frac{4}{6}$$

$$\therefore x = 33,69^\circ$$

10. Eerstens, teken 'n skets::

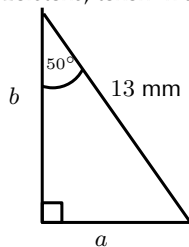


Die afstand van D tot by die y -as is 12 eenhede. Die afstand van C tot die punt waar die loodreg lyn D sny die y -as is $14 - (-13) = 27$ eenhede.

$$\tan x = \frac{12}{27}$$

$$\therefore x = 23,96^\circ$$

11. Eerstens, teken 'n skets::



$$\sin 50^\circ = \frac{a}{13}$$

$$a = 13 \sin 50^\circ$$

$$\therefore a = 9,96 \text{ mm}$$

Gebruik die stelling van Pythagoras om die ander sy te vind:

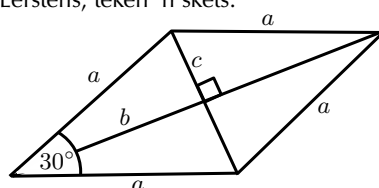
$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$= 13^2 - 9,96^2$$

$$\therefore b = \sqrt{69,7984}$$

$$= 8,35 \text{ mm}$$

12. Eerstens, teken 'n skets:



(a) Die omtrek word gevind deur die getelling van elke sy saam . Al die sye het dieselfde lengte dus omtrek $= 4a$

$$20 = 4a$$

$$\therefore a = 5 \text{ cm}$$

(b) Die hoeklyne van 'n ruit halveer die hoek, so as ons in een van die klein driehoeke werk kan ons trigonometriesse identiteite gebruik om b te vind:

$$\cos 15^\circ = \frac{b}{5}$$

$$\therefore b = 4,83 \text{ cm}$$

$$\text{By Pythagoras } c^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore c = \sqrt{25 - 23,33}$$

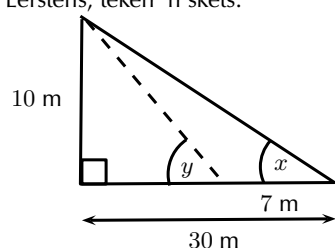
$$c = 1,29 \text{ cm}$$

Omdat die hoeklyne mekaar halveer ken ons dat die totale lengte van elke hoeklyn óf $2b$ of $2c$ is, afhange van watter hoeklyn ons ondersoek.

$$\text{Die een hoeklyn} = 4,8 \times 2 = 9,6 \text{ cm}$$

$$\text{Die ander hoeklyn} = 1,29 \times 2 = 2,58 \text{ cm}$$

13. Eerstens, teken 'n skets:



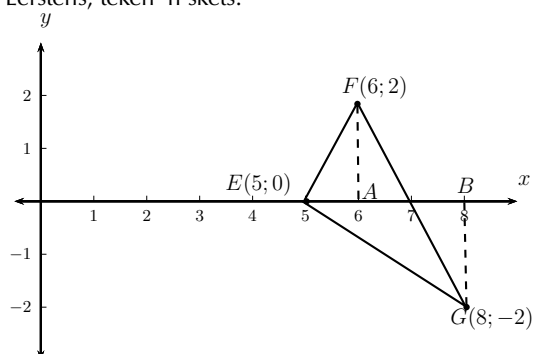
$$(a) \tan x = \frac{10}{30}$$

$$\therefore x = 18^\circ$$

$$(b) \tan y = \frac{10}{23}$$

$$\therefore y = 23^\circ$$

14. Eerstens, teken 'n skets:



Om $\hat{FEG}$ te vind beskou ons driehoeke FEA en GEB .

In $\triangle FEA$

$$\tan \hat{FEA} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \hat{FEA} = 63,43^\circ$$

In $\triangle GEB$

$$\tan \hat{GEB} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \hat{GEB} = 33,69^\circ$$

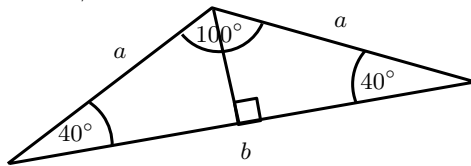
Tel hierdie twee hoeke saam om die waarde van $\hat{FEG}$ te kry:

$$\hat{FEG} = \hat{FEB} + \hat{GEB}$$

$$= 33,69^\circ + 63,43^\circ$$

$$\therefore \hat{FEG} = 97,12^\circ$$

15. Eerstens, teken 'n skets:



Konstrueer 'n middelloodlyn om 'n reghoekige driehoek te maak.

Dus het ons:

$$2a + b = 20$$

$$b = 2(10 - a)$$

$$\therefore \cos 50^\circ = \frac{b}{a}$$

$$0,77 = \frac{2(10-a)}{a}$$

$$0,77 = \frac{10 - a}{a}$$

$$0,77a = 10 - a$$

$$\therefore a = 5,56 \text{ cm}$$

$$\therefore b = 2(10 - 5,56) = 8,7 \text{ cm}$$

Oefening 8 - 1

1. Vind die lente AB as:
 - (a) $A(2; 7)$ en $B(-3; 5)$
 - (b) $A(-3; 5)$ en $B(-9; 1)$
 - (c) $A(x; y)$ en $B(x + 4; y - 1)$
2. Die lengte van $CD = 5$. Vind die onbekende koördinaat as:
 - (a) $C(6; -2)$ en $D(x; 2)$
 - (b) $C(4; y)$ en $D(1; -1)$

Oplossings vir Oefening 8 - 1

$$\begin{aligned} 1.(a) \quad d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(2 - (-3))^2 + (7 - 5)^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(-3 - (-9))^2 + (5 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(6)^2 + (4)^2} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x - (x + 4))^2 + (y - (y - 1))^2} \\ &= \sqrt{(x - x - 4)^2 + (y - y + 1)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.(a) \quad d_{CD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ 5 &= \sqrt{(6 - x)^2 + (-2 - 2)^2} \\ 5^2 &= 36 - 12x + x^2 + 16 \end{aligned}$$

$$0 = x^2 - 12x + 36 - 25 + 16$$

$$0 = x^2 - 12x + 27$$

$$= (x - 3)(x - 9)$$

Dus $x = 3$ of $x = 9$

Kontroleer oplossing vir $x = 3$:

$$d_{CD} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(6 - 3)^2 + (-2 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

Oplossing is geldig.

Kontroleer oplossing vir $x = 9$:

$$d_{CD} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(6 - 9)^2 + (-2 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

Oplossing is geldig.

$$(b) d_{CD} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$5 = \sqrt{(4 - 1)^2 + (y + 1)^2}$$

$$5^2 = 9 + y^2 + 2y + 1$$

$$0 = y^2 + 2y + 1 + 9 - 25$$

$$0 = y^2 + 2y - 15$$

$$= (y - 3)(y + 5)$$

Dus $y = 3$ of $y = -5$

Kontroleer oplossing vir $y = 3$:

$$d_{CD} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 + 1)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

Oplossing is geldig.

Kontroleer oplossing vir $y = -5$:

$$d_{CD} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(4 - 1)^2 + (-5 + 1)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

Oplossing is geldig.

Oefening 8 - 2

1. Vind die gradiënt van AB is

(a) $A(7; 10)$ en $B(-4; 1)$

- (b) $A(-5; -9)$ en $B(3; 2)$
 (c) $A(x - 3; y)$ en $B(x; y + 4)$

2. Die gradiënt van $CD = \frac{2}{3}$, vind p as:

- (a) $C(16; 2)$ en $D(8; p)$
 (b) $C(3; 2p)$ en $D(9; 14)$

Oplossings vir Oefening 8 - 2

$$\begin{aligned}
 \text{1.(a)} \quad m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{11}{8} \\
 &= \frac{-1 - 10}{-4 - 7} \\
 &= \frac{-11}{-11} \\
 &= 1 \\
 \text{(b)} \quad m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{2 - (-9)}{3 - (-5)} \\
 \text{2.(a)} \quad m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \frac{2}{3} &= \frac{14 - 2p}{9 - 3} \\
 \frac{2}{3} &= \frac{p - 2}{8 - 16} & \frac{2}{3} \times (6) &= 14 - 2p \\
 \frac{2}{3} \times (-8) &= p - 2 & 4 - 14 &= -2p \\
 \frac{-16 + 6}{3} &= p & \frac{-10}{-2} &= p \\
 \frac{-10}{3} &= p & 5 &= p \\
 \text{(b)} \quad m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
 \end{aligned}$$

Oefening 8 - 3

1. Bepaal of AB ewewydig aan of loodreg op CD is, of nie een van die twee nie:

- (a) $A(3; -4)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -1)$, $D(7; 23)$
 (b) $A(3; -4)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -1)$, $D(0; -4)$
 (c) $A(3; -4)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -1)$, $D(1; 2)$

2. Bepaal of die volgende punte op dieselfde reguitlyn lê:

- (a) $E(0; 3)$, $F(-2; 5)$, $G(2; 1)$
 (b) $H(-3; -5)$, $I(-0; 0)$, $J(6; 10)$
 (c) $K(-6; 2)$, $L(-3; 1)$, $M(1; -1)$

3. Punte $P(-6; 2)$, $Q(2; -2)$ en $R(-3; r)$ lê op 'n reguitlyn. Vind die waarde van r .

4. Lyn PQ met $P(-1; -7)$ en $Q(q; 0)$ het 'n gradiënt van 1. Vind q .

Oplossings vir Oefening 8 - 3

$$\begin{aligned}
 \text{1.(a)} \quad m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{2 - (-4)}{5 - 3} \\
 &= \frac{6}{2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

En,

$$\begin{aligned}
 m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{23 - (-1)}{7 - (3)} \\
 &= \frac{24}{4} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

So $m_{AB} = m_{CD}$

Dus $AB \parallel CD$.

$$\text{(b)} \quad m_{AB} = 3$$

En,

$$\begin{aligned}
 m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{-4 - (-1)}{0 - (-1)} \\
 &= \frac{-3}{1} \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

So $m_{AB} \neq m_{CD}$

Dus is AB en CD nie ewewydig nie.

En $m_{AB} \times \frac{1}{m_{CD}} \neq -1$

Dus is AB en CD nie loodreg nie.

$$\text{(c)} \quad m_{AB} = 3$$

En,

$$\begin{aligned}
 m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{2 - (-1)}{1 - (-1)} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

So $m_{AB} \neq m_{CD}$

Dus is AB en CD nie ewewydig nie.

And $m_{AB} \times \frac{1}{m_{CD}} \neq -1$

Dus is AB en CD nie loodreg nie..

$$\begin{aligned}
 \text{2.(a)} \quad m_{EF} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{5 - 3}{-2 - 0} \\
 &= \frac{2}{-2} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

En,

$$\begin{aligned}
 m_{FG} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{1 - 5}{2 - (-2)} \\
 &= \frac{-4}{4} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

So $m_{HI} = m_{FG}$ en F is 'n gemeenskaplike punt

Dus lê E, F en G op dieselfde lyn.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad m_{EF} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0 - (-5)}{0 - (-3)} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

En,

$$\begin{aligned} m_{IJ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{10 - 0}{6 - 0} \\ &= \frac{10}{6} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

So $m_{HI} = m_{IJ}$ en I is 'n gemeenskaplike punt,

Dus lê H, I en J op dieselfde lyn.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad m_{KL} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1 - 2}{-3 - (-6)} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

En,

$$\begin{aligned} m_{LM} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-1 - 1}{1 - (-3)} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

So $m_{HI} \neq m_{IJ}$, dus lê H, I en J nie op dieselfde lyn nie.

$$\begin{aligned} 3. \quad m_{PQ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-2 - 5}{2 - (-6)} \\ &= \frac{-7}{8} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

En,

$$\begin{aligned} m_{QR} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{r - (-2)}{-3 - 2} \\ &= \frac{r + 2}{-5} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

So,

$$-\frac{1}{2} = \frac{r + 2}{-5}$$

$$(-1) \times (-5) = 2(r + 2)$$

$$5 = 2r + 4$$

$$5 - 4 = 2r$$

$$1 = 2r$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad m_{PQ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ 1 &= \frac{0 - (-7)}{q - (-1)} \\ q + 1 &= 7 \\ q &= 6 \end{aligned}$$

Oefening 8 - 4

1. Vind die middelpunt van die volgende lynstukke:
 - (a) $A(2; 5), B(-4; 7)$
 - (b) $C(5; 9), D(23; 55)$
 - (c) $E(x + 2; y - 1), F(x - 5; y - 4)$
2. M , die middelpunt van PQ is $(3; 9)$. Vind P as Q is $(-2; 5)$.
3. $PQRS$ is 'n parallelogram met punte $P(5; 3), Q(2; 1)$ en $R(7; -3)$. Vind punt S .

Oplossings vir Oefening 8 - 4

$$\begin{aligned}
 1.(a) \quad M_{AB} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{5 + 7}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{-2}{2}, \frac{12}{2} \right) \\
 &= (-1; 6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad M_{CD} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{5 + 23}{2}, \frac{9 + 55}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{28}{2}, \frac{64}{2} \right) \\
 &= (14; 32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad M_{EF} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{x + 2 + x - 5}{2}, \frac{y - 1 + y - 4}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{2x - 3}{2}, \frac{2y - 5}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad M_{PQ} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
 (3; 9) &= \left(\frac{x - 2}{2}, \frac{y + 5}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Los op vir x :

$$3 = \frac{x - 2}{2}$$

$$6 = x - 2$$

$$x = 8$$

Los op vir y :

$$9 = \frac{y + 5}{2}$$

$$18 = y + 5$$

$$y = 13$$

$$\text{Dus } P(8; 13)$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad M_{QR} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{2 + 7}{2}, \frac{1 + (-3)}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{9}{2}, \frac{-2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{9}{2}; -1\right)$$

Gebruik middelpunt M om die koördinate van S te vind:

$$M_{QR} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$\left(\frac{9}{2}; -1\right) = \left(\frac{x+5}{2}; \frac{y+3}{2}\right)$$

Los op vir x :

$$\frac{9}{2} = \frac{x+5}{2}$$

$$9 = x + 5$$

$$x = 4$$

Los op vir y : $-1 = \frac{y+3}{2}$

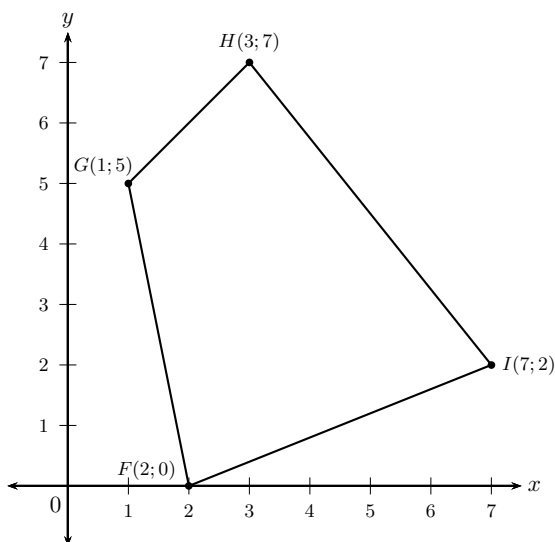
$$-2 = y + 3$$

$$y = -5$$

Dus $S(4; -5)$

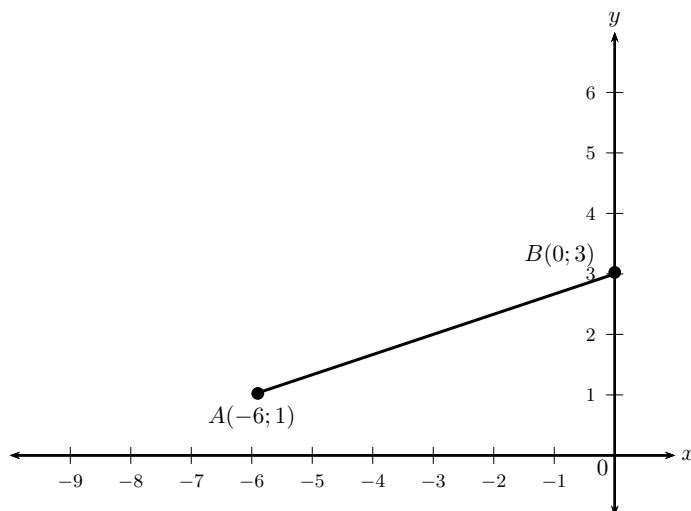
Einde van Hoofstuk Oefeninge

- Stel die volgende vorms op die Cartesiese vlak voor:
 - Driehoek DEF met $D(1; 2)$, $E(3; 2)$ en $F(2; 4)$
 - Vierhoek $GHIJ$ met $G(2; -1)$, $H(0; 2)$, $I(-2; -2)$ en $J(1; -3)$
 - Vierhoek $MNOP$ met $M(1; 1)$, $N(-1; 3)$, $O(-2; 3)$ en $P(-4; 1)$
 - Vierhoek $WXYZ$ met $W(1; -2)$, $X(-1; -3)$, $Y(2; -4)$ en $Z(3; -2)$
- In die gegewe diagram is die hoekpunte van 'n veelhoek $F(2; 0)$, $G(1; 5)$, $H(3; 7)$ en $I(7; 2)$.



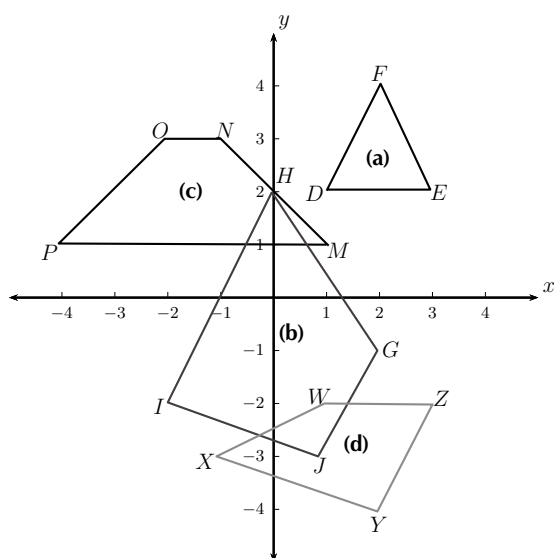
- Vind die lengtes van die sye van $FGHI$?
 - Is die teenoorstaande sye van $FGHI$ parallel?
 - Toon deur berekening of die hoeklyne van $FGHI$ mekaar halveer.
 - Watter tipe veelhoek is $FGHI$? Gee redes vir jou antwoord.
- 'n Veelhoek $ABCD$ met hoekpunte $A(3; 2)$, $B(1; 7)$, $C(4; 5)$ en $D(1; 3)$ word gegee.
 - Teken die veelhoek.

- (b) Bepaal die sylengtes van die veelhoek.
4. $ABCD$ is 'n veelhoek met hoekpunte $A(0; 3)$, $B(4; 3)$, $C(5; -1)$ en $D(-1; -1)$.
- (a) Wys dat:
- (i) $AD = BC$
- (ii) $AB \parallel DC$
- (b) Benoem $ABCD$?
- (c) Wys dat die hoeklyne AC en BD mekaar nie halveer nie.
5. P , Q , R en S is die punte $(-2; 0)$, $(2; 3)$, $(5; 3)$, $(-3; -3)$ onderskeidelik.
- (a) Wys dat:
- (i) $SR = 2PQ$
- (ii) $SR \parallel PQ$
- (b) Bereken die lengte van:
- (i) PS
- (ii) QR
- (c) Watter tipe veelhoek is $PQRS$? Gee redes vir jou antwoord.
6. $EFGH$ is 'n parallelogram met hoekpunte $E(-1; 2)$, $F(-2; -1)$ en $G(2; 0)$. Vind die koördinate van H deur gebruik te maak van die feit dat die hoeklyne van 'n parallelogram mekaar halveer.
7. $PQRS$ is 'n vierhoek met punte $P(0; -3)$; $Q(-2; 5)$; $R(3; 2)$ en $S(3; -2)$ in die Cartesiese vlak.
- (a) Vind die lengte van QR .
- (b) Bepaal die gradiënt van PS .
- (c) Vind die middelpunt van PR .
- (d) Is $PQRS$ 'n parallelogram? Verskaf redes vir jou antwoord.
8. $A(-2; 3)$ en $B(2; 6)$ is punte op die Cartesiese vlak. $C(a; b)$ is die middelpunt van AB . Vind die waardes van a en b .
9. Beskou: driehoek ABC met hoekpunte $A(1; 3)$, $B(4; 1)$ en $C(6; 4)$:
- (a) Skets die driehoek ABC op die Cartesiese vlak.
- (b) Wys dat ABC is 'n gelykbenige driehoek is.
- (c) Bepaal die koördinate van M , die middelpunt van AC .
- (d) Bepaal die gradiënt van AB .
- (e) Toon aan dat die volgende punte saamlynig is: A , B en $D(7; -1)$
10. In die diagram, is A die punt $(-6; 1)$ en B is die punt $(0; 3)$:



- (a) Vind die vergelyking van die lyn AB .
 (b) Bereken die lengte van AB .
11. $\triangle PQR$ het hoekpunte $P(1; 8)$, $Q(8; 7)$ en $R(7; 0)$. Wys deur berekening dat $\triangle PQR$ 'n reghoekige gelykbenige driehoek is.
12. $\triangle ABC$ het hoekpunte $A(-3; 4)$, $B(3; -2)$ en $R(-5; -2)$. M is die middelpunt van AC en N die middelpunt van BC . Gebruik $\triangle ABC$ om die middelpuntstelling deur analitiese meetkundige metodes te bewys.

Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge



1.

$$\begin{aligned}
 2.(a) \quad d_{FG} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (5 - 0)^2} \\
 &= \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} \\
 &= \sqrt{26} \\
 d_{IH} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(7-3)^2 + (2-7)^2} \\
 &= \sqrt{(4)^2 + (-5)^2} \\
 &= \sqrt{41}
 \end{aligned}$$

Teenoorstande sye FG en IH is nie gelyk aan mekaar nie.

$$\begin{aligned}
 d_{GH} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(3-1)^2 + (7-5)^2} \\
 &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2} \\
 &= \sqrt{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{FI} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(2-7)^2 + (0-2)^2} \\
 &= \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} \\
 &= \sqrt{29}
 \end{aligned}$$

Teenoorstande sye GH en FI is nie gelyk aan mekaar nie.

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad m_{FG} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{0-5}{2-1} \\
 &= \frac{-5}{1} \\
 &= -5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{IH} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{2-7}{7-3} \\
 &= \frac{-5}{4} \\
 &= -\frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Dus $m_{FG} \neq m_{IH}$ en teenoorstande sye nie ewewydig is nie.

$$\begin{aligned}
 m_{GH} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{5-7}{1-3} \\
 &= \frac{-2}{-2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{FI} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{0-2}{2-7} \\
 &= \frac{-2}{-5} \\
 &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

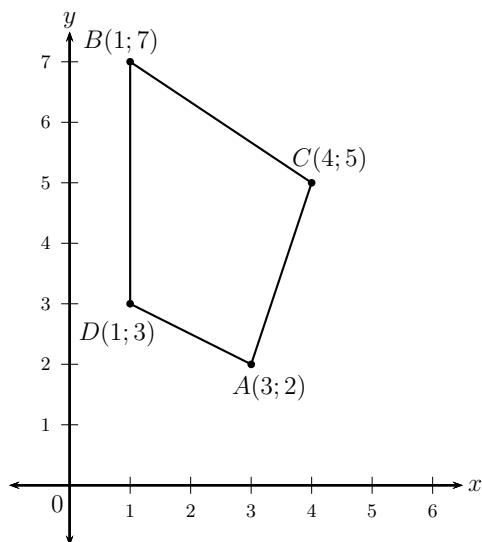
Dus $m_{GH} \neq m_{FI}$ en teenoorstande sye nie ewewydig is nie.

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad M_{GI} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{1+7}{2}; \frac{5+2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{8}{2}; \frac{7}{2} \right) \\
 &= \left(4; \frac{7}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{FH} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{3+2}{2}; \frac{7+0}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Dus $M_{GI} \neq M_{FH}$ en hoeklyne nie mekaar halveer nie.

(d) Dit is 'n normale vierhoek.



3.(a)

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 7)^2} \\
 &= \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} \\
 &= \sqrt{26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{BC} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 7)^2} \\
 &= \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} \\
 &= \sqrt{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{CD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(1 - 4)^2 + (3 - 5)^2} \\
 &= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} \\
 &= \sqrt{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{DA} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(1 - 3)^2 + (3 - 2)^2} \\
 &= \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} \\
 &= \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{4.(a) i.} \quad d_{AD} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(0 - (-1))^2 + (3 - (-1))^2} \\
 &= \sqrt{(1)^2 + (4)^2} \\
 &= \sqrt{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{BC} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(4 - 5)^2 + (3 - (-1))^2} \\
 &= \sqrt{(-1)^2 + (4)^2} \\
 &= \sqrt{17}
 \end{aligned}$$

 Dus teenoorstaande sye AD en BC is gelyk aan mekaar.

$$\begin{aligned}
 \text{ii.} \quad m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{3 - 7}{0 - 1} \\
 &= \frac{-4}{-1} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{DC} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{-1+1}{-1-5} \\
 &= \frac{0}{-6} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Gradiënte is gelyk dus is die teenoorstaande sye AB en DC ewewydig.

(b) 'n Gelykbenige trapesium; een paar teenoorstaande sye gelyk in lengte en een paar teenoorstaande sye ewewydig.

$$\begin{aligned}
 (c) \quad M_{AC} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{0+5}{2}, \frac{3-1}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{5}{2}, \frac{2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{5}{2}, 1 \right) \\
 M_{BD} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{4-1}{2}, \frac{3-1}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{3}{2}, 1 \right)
 \end{aligned}$$

Dus halveer nie die hoeklyne mekaar nie.

$$\begin{aligned}
 5.(a) \quad i. \quad d_{PQ} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (0 - 3)^2} \\
 &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \\
 &= \sqrt{25} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{SR} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(-3 - 5)^2 + (-3 - 3)^2} \\
 &= \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \\
 &= \sqrt{100} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

Dus $SR = 2PQ$.

$$\begin{aligned}
 ii. \quad m_{PQ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{3-0}{2-(-2)} \\
 &= \frac{3}{4} \\
 m_{SR} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{-3-3}{-3-5} \\
 &= \frac{-6}{-8} \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Dus $m_{PQ} = m_{SR}$.

$$\begin{aligned}
 (b) \quad i. \quad d_{PS} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(-2 - (-3))^2 + (0 - (-3))^2} \\
 &= \sqrt{(1)^2 + (3)^2} \\
 &= \sqrt{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ii. \quad d_{QR} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 3)^2} \\
 &= \sqrt{(-3)^2 + 0} \\
 &= \sqrt{9} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

(c) Trapesium.

$$6. M_{EG} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{-1+2}{2}; \frac{2+0}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$$

$$M_{FH} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{-2+x}{2}; \frac{-1+y}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2}; 1 \right) = \left(\frac{-2+x}{2}; \frac{-1+y}{2} \right)$$

Los op vir x :

$$\frac{1}{2} = \frac{-2+x}{2}$$

$$1 = -2 + x$$

$$x = 3$$

Los op vir y :

$$1 = \frac{-1+y}{2}$$

$$2 = -1 + y$$

$$y = 3$$

Dus $H(3; 3)$

$$7.(a) d_{QR} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(-2 - 3)^2 + (5 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{34}$$

$$(b) m_{PS} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-3+2}{0-3}$$

$$= \frac{-1}{-3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$(c) M_{QR} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{0+3}{2}; \frac{-3+2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2} \right)$$

$$(d) m_{RS} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-2-2}{3-3}$$

$$= \frac{-4}{0}$$

= ongedefineerd

En,

$$m_{QR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{2-5}{3-(-2)}$$

$$= \frac{-3}{5}$$

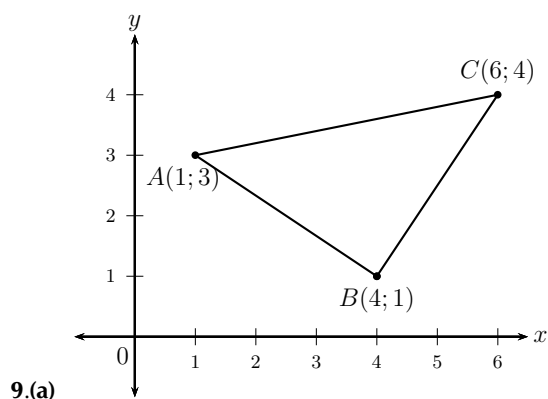
Dus is $PQRS$ nie 'n parallelogram nie.

$$8. M_{AB} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{-2-2}{2}; \frac{3+6}{2} \right)$$

$$(a; b) = \left(0; \frac{9}{2} \right)$$

Dus $a = 0$ en $b = \frac{9}{2}$.



$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(1 - 4)^2 + (3 - 1)^2} \\
 &= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} \\
 &= \sqrt{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{BC} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(4 - 6)^2 + (1 - 4)^2} \\
 &= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} \\
 &= \sqrt{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{AC} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(1 - 6)^2 + (3 - 4)^2} \\
 &= \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} \\
 &= \sqrt{26}
 \end{aligned}$$

Twee sye van die driehoek het dieselfde lengte dus is $\triangle ABC$ gelykbenige.

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad M_{AC} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{1+6}{2}; \frac{3+4}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{1-3}{4-1} \\
 &= \frac{-2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{BD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{-1-1}{7-4} \\
 &= \frac{-2}{3}
 \end{aligned}$$

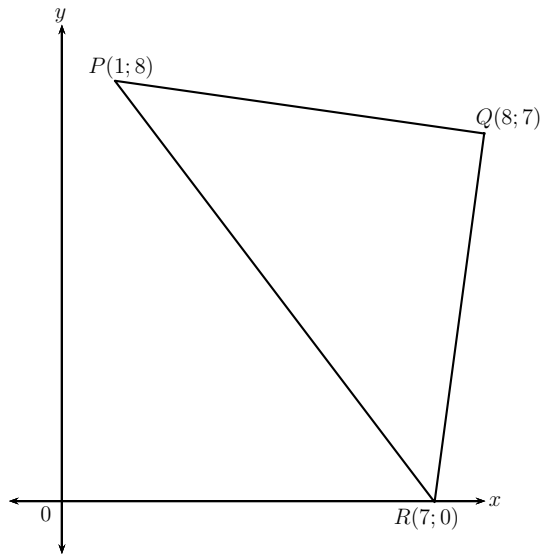
$$\begin{aligned}
 m_{AD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{-1-3}{7-1} \\
 &= \frac{-2}{3}
 \end{aligned}$$

Dus lê A, B en D op dieselfde lyn.

$$\begin{aligned}
 \text{10.(a)} \quad m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{1-3}{-6-0} \\
 &= \frac{-2}{-6} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Dus is die vergelyking van die lyn AB , $y = \frac{1}{3}x + 3$.

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad d_{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 &= \sqrt{(-6 + 0)^2 + (1 - 3)^2} \\
 &= \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} \\
 &= \sqrt{40}
 \end{aligned}$$



11.

$$m_{PQ} = \frac{8-7}{1-8}$$

$$= -\frac{1}{7}$$

$$m_{RQ} = \frac{7-0}{8-7}$$

$$= \frac{7}{1}$$

$$m_{PR} \times m_{RQ} = -\frac{1}{7} \times \frac{7}{1}$$

$$= -1$$

$$\text{dus } \hat{PQR} = 90^\circ$$

$$PQ = \sqrt{(1-8)^2 + (8-7)^2}$$

$$= \sqrt{49+1}$$

$$= \sqrt{50} \text{ eenhede}$$

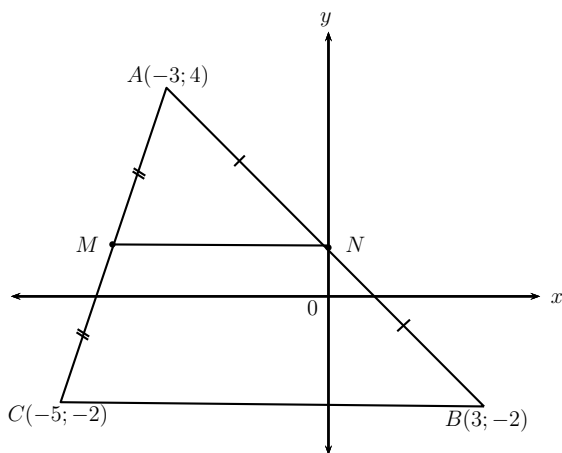
$$RQ = \sqrt{(8-7)^2 + (7-0)^2}$$

$$= \sqrt{1+49}$$

$$= \sqrt{50} \text{ eenhede}$$

$$\text{Dus } PQ = RQ$$

Dus is $\triangle PQR$ 'n reghoekige, gelykbenige driehoek.



12.

$$M = \left(\frac{-3-5}{2}; \frac{4-2}{2} \right)$$

$$= (-4; 1)$$

$$N = \left(\frac{-3+3}{2}; \frac{4-2}{2} \right)$$

$$= (0; 1)$$

$$m_{CB} = 0 \text{ (ewewydig met } x\text{-as)}$$

$$m_{MN} = 0$$

MN ewewydig CB

Lengte $MN = 4$ eenhede

Lengte $CB = 8$ eenhede

dus $MN = \frac{1}{2}CB$

Oefening 9 - 1

1. Bereken die gemiddelde, die mediaan en die modus van die volgende datastelle:

- (a) 2; 5; 8; 8; 11; 13; 22; 23; 27
- (b) 15; 17; 24; 24; 26; 28; 31; 43
- (c) 4; 11; 3; 15; 11; 13; 25; 17; 2; 11
- (d) 24; 35; 28; 41; 32; 49; 31

2. Die ouderdomme van 15 drawwers van die Comrades Marathon is aangeteken:

31; 42; 28; 38; 45; 51; 33; 29; 42; 26; 34; 56; 33; 46; 41

Bereken die gemiddelde, die mediaan en die modus van die ouderdomme.

3. In die eerste van 'n aantal flesse is daar 1 lekkertjie. In die tweede is daar 3 lekkers. Die gemiddelde van die aantal lekkers in die eerste twee flesse is 2.

- (a) As die gemiddelde aantal lekkers in die eerste drie flesse 3 is, hoeveel lekkers is daar in die derde fles?
- (b) As die gemiddelde aantal lekkers in die eerste vier flesse 4 is, hoeveel lekkers is daar in die vierde fles?

4. Vind 'n stel van 5 ouderdomme waarvoor die gemiddelde ouderdom 5 is, die modale ouderdom (dus die modus) 2 is en die mediaan ouderdom 3 jaar is.

5. Vier vriende het elkeen 'n aantal albasters. Hulle bereken dat 10 die gemiddelde is van die aantal albasters wat hulle het. Een van hulle vertrek. Sy het 4 albasters. Hoeveel albasters het die oorblywende vriende altesaam?

Oplossings vir Oefening 9 - 1

- 1.(a) Gemiddelde = 13,2; Mediaan = 11; Modus = 8
- (b) Gemiddelde = 26; Mediaan = 25; Modus = 24
- (c) Gemiddelde = 11,2; Mediaan = 11; Modus = 11
- (d) Gemiddelde = 34,29; Mediaan = 32; Geen modus

2. Gemiddelde = 38,3; Mediaan = 38; Modus = 33 en 42

3.(a) Laat n_3 die nommer lekkers in die derde fles wees:
$$\frac{1+3+n_3}{3} = 3$$

$$1 + 3 + n_3 = 9$$

$$n_3 = 5$$

(b) Laat n_4 die nommer lekkers in die vierde fles wees:

$$\frac{1+3+5+n_4}{4} = 4$$

$$9 + n_4 = 16$$

$$n_4 = 7$$

4. Laat die vyf verskillende ouderdomme x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5 wees.

Dus is die gemiddelde

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$$

Die mediaan waarde is by posisie 3, dus $x_3 = 3$.

Die modus is die ouderdom wat die meeste voorkom. Daar is ten minste 2 ouderdomme wat 2 is. Die ander ouderdomme moet alles verskillend wees. Die vier onbekende ouderdomme kan nie almal 2 wees, want dit sal nie 'n gemiddelde van 5 gee. Verder, aangesien al die berekeninge van die gemiddelde, modus and mediaan is op geordende stelde data gedoen, kan ons nie 3 ouderdomme wat 2 is, want dan sou die mediaan ouderdom nie 2 wees nie. Dus het ons

$$2 + 2 + 3 + x_4 + x_5 = 25$$

$$18 = x_4 + x_5$$

x_4 en x_5 kan enige getalle wees wat tot 18 voeg en nie dieselfde waarde is nie, byvoorbeeld 12 en 6 of 8 en 10 of 3 en 15, ens.

Moontlik datastelle:

2, 2, 3, 3, 15; 2, 2, 3, 4, 14; 2, 2, 3, 5, 13; 2, 2, 3, 6, 12; 2, 2, 3, 7, 11; 2, 2, 3, 8, 10

Let op dat die stel ouderdomme moet geordende wees, die mediaan waarde moet 3 wees en daar moet 2 ouderdomme van 2 wees.

5. Laat die getal albasters per vriend x_1, x_2, x_3 en x_4 wees.

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$$

Een vriend verlaat,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40 - 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 36$$

Dus het die oorblywende vriende 36 albasters.

Oefening 9 - 2

1. 'n Eksperiment is onderneem in die skool en 50 leerders is gevra om te raai hoeveel lekkers daar in 'n bottel is. Die volgende raaiskote word aangeteken:

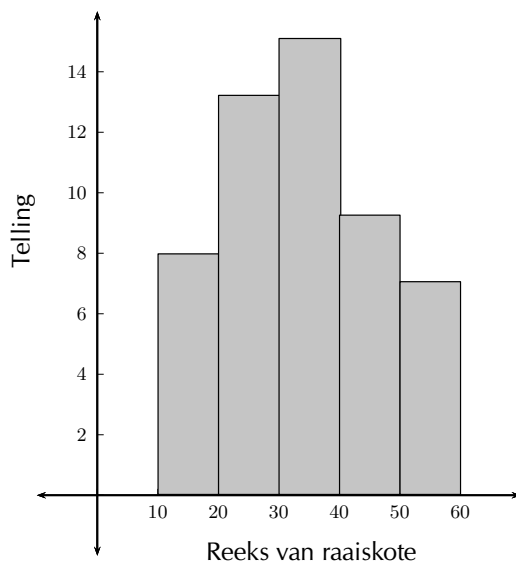
56	49	40	11	33	33	37	29	30	59
21	16	38	44	38	52	22	24	30	34
42	15	48	33	51	44	33	17	19	44
47	23	27	47	13	25	53	57	28	23
36	35	40	23	45	39	32	58	22	40

- (a) Trek 'n gegroepeerde frekwensietabel op en gebruik die volgende intervale $10 < x \leq 20$; $20 < x \leq 30$; $30 < x \leq 40$; $40 < x \leq 50$; en $50 < x \leq 60$.
- (b) Trek 'n histogram om die frekwensietabel van die gegroepeerde data voor te stel.

Oplossings vir Oefening 9 - 2

1.(a)

Groep	Frek
11 – 20	6
21 – 30	13
31 – 40	15
41 – 50	9
51 – 60	7



Oefening 9 - 3

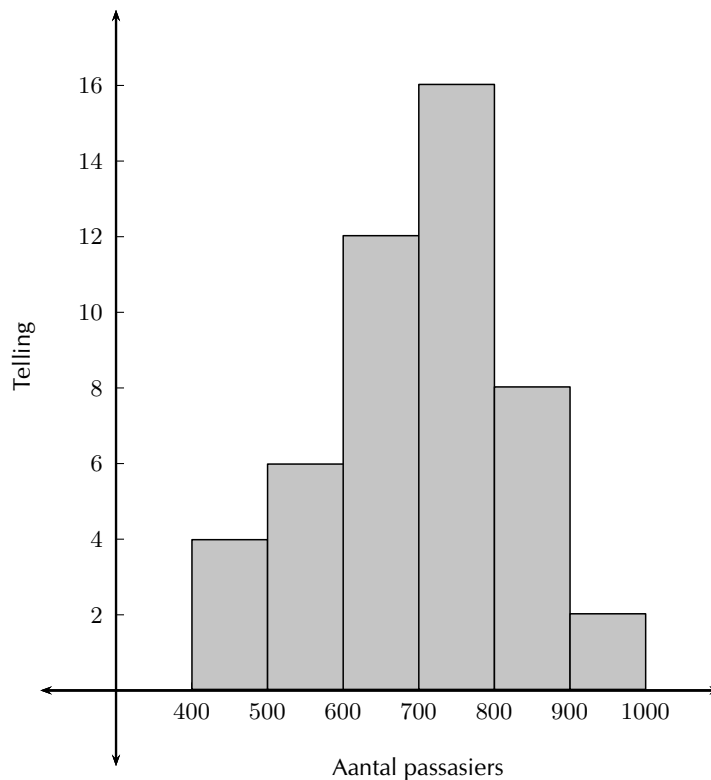
1. Oorweeg die volgende gegroepeerde data en bereken die gemiddelde, die modale groep en die mediaangroep.

Massa (kg)	Telling
$40 < m \leq 45$	7
$45 < m \leq 50$	10
$50 < m \leq 55$	15
$55 < m \leq 60$	12
$60 < m \leq 65$	6

2. Vind die gemiddelde, die modale groep en die mediaangroep in die datastel van die tyd wat mense nodig om 'n spel te voltooi:

Tyd (s)	Telling
$35 < t \leq 45$	5
$45 < t \leq 55$	11
$55 < t \leq 65$	15
$65 < t \leq 75$	26
$75 < t \leq 85$	19
$85 < t \leq 95$	13
$95 < t \leq 105$	6

3. Die histogram hieronder bewys die aantal passasiers wat per week in Alfred se taxi reis. Bereken
- (a) die modale interval
 - (b) die totale aantal passasiers wat in Alfred se taxi gereis het
 - (c) 'n beraming van die gemiddelde
 - (d) 'n beraming van die mediaan
 - (e) indien dit geskat word dat elke passasier 'n gemiddelde afstand van 5 km gereis het, hoeveel geld sou Alfred verdien as hy R 3,50 per km gevra het?



Oplossings vir Oefening 9 - 3

- Gemiddelde = 53; Modale groep: $50 < m \leq 55$; Mediaangroep: $50 < m \leq 55$
- Gemiddelde = 71,66; Modale groep: $65 < t \leq 75$; Mediaangroep: $65 < t \leq 75$
- (a) $700 < x \leq 800$
 (b) 33 600
 (c) 700
 (d) 750
 (e) R 588 000

Oefening 9 - 4

- Vind die variasiewydte van die datastel:

{1; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 7; 8; 8; 9; 10; 10}

- Wat is die kwartiele van hierdie datastel?

{3; 5; 1; 8; 9; 12; 25; 28; 24; 30; 41; 50}

3. 'n Klas van 12 studente skryf 'n toets en die resultaat is as volg:

20; 39; 40; 43; 43; 46; 53; 58; 63; 70; 75; 91

Vind die variasiewydte, kwartiele en die interkwartielwydte.

4. Drie stelle data word gegee:

- **Datastel 1:** {9; 12; 12; 14; 16; 22; 24}
- **Datastel 2:** {7; 7; 8; 11; 13; 15; 16; 16}
- **Datastel 3:** {11; 15; 16; 17; 19; 19; 22; 24; 27}

Vir elke datastel vind:

- (a) die variasiewydte
- (b) die onderste kwartiel
- (c) die interkwartielwydte
- (d) die semi-interkwartielwydte
- (e) die mediaan
- (f) die boonste kwartiel

Oplossings vir Oefening 9 - 4

1. Variasiewydte: $10 - 1 = 9$
2. $Q_1 = 6,2$; $Q_2 = 18$; $Q_3 = 29$
3. Variasiewydte: $91 - 20 = 71$
 $Q_1 = 41,5$; $Q_2 = 49,5$; $Q_3 = 66,5$
 Interkwartielwydte: $66,5 - 41,5 = 25$
- 4.(a) Variasiewydte: $24 - 9 = 15$; $16 - 7 = 9$; $27 - 11 = 16$
 (b) Q_1 : 12; 7,5; 15,5
 (c) Interkwartielwydte: 10; 8; 7,5
 (d) Semi-interkwartielwydte: 5; 4; 3,75
 (e) Mediaan: 14; 12; 19
 (f) Q_3 : 22; 15,5; 23

Oefening 9 - 5

1. Lisa werk in 'n rekenaarwinkel. Sy verkoop die volgende aantal rekenaars in 'n maand:

{27; 39; 3; 15; 43; 27; 19; 54; 65; 23; 45; 16}

Gee die vyf-getal opsomming en die mond-en-snor grafiek van Lisa se verkope.

2. Zithulele werk in telefoonverkope. Hy hou boek van die aantal verkope wat hy elke

maand doen en die data word hier gegee..

{49; 12; 22; 35; 2; 45; 60; 48; 19; 1; 43; 12}

Gee die vyf-getal opsomming en die mond-en-snor grafiek van Zithulele se verkope.

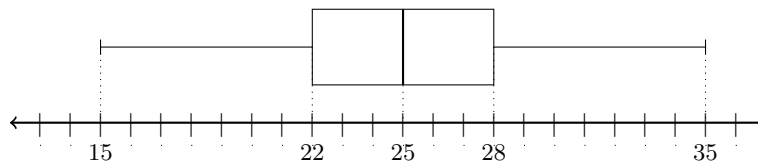
3. Hannah het vir nege maande gewerk as 'n bloemiste. Sy verkoop die volgende aantal bruidsruikers:

{16; 14; 8; 12; 6; 5; 3; 5; 7}

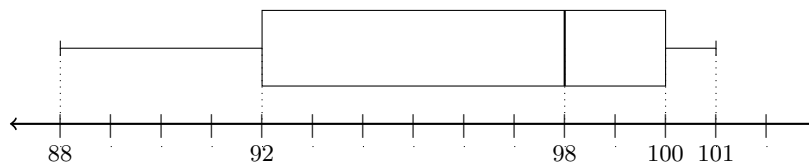
Gee die vyf-getal opsomming van Hannah se verkope.

4. Gebruik die diagram hieronder om die vyf-getal opsomming te bereken:

(a)



(b)



Oplossings vir Oefening 9 - 5

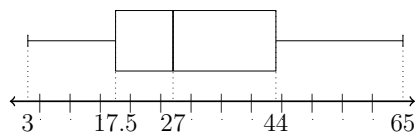
1. Minimum: 3

Q_1 : 17,5

Mediaan: 27

Q_3 : 44

Maksimum: 65



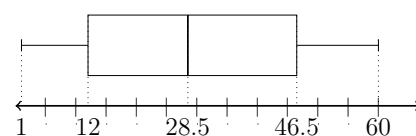
2. Minimum: 1

Q_1 : 12

Mediaan: 28,5

Q_3 : 46,5

Maksimum: 60



3. Minimum: 3

Q_1 : 5
 Mediaan: 7
 Q_3 : 13
 Maksimum: 16

4.(a) Minimum: 15
 Q_1 : 22
 Mediaan: 25
 Q_3 : 28
 Maksimum: 35

(b) Minimum: 88
 Q_1 : 92
 Mediaan: 98
 Q_3 : 100
 Maksimum: 101

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Die hoogste 7 bome in die park het hoogtes (in meters):

41; 60; 47; 42; 44; 42; 47

Vind die mediaan van hulle hoogtes.

2. Die studente in Ndeme se klas het die volgende ouderdomme:

5; 6; 7; 5; 4; 6; 6; 6; 7; 4

Vind die modale ouderdom.

3. 'n Ingenieursfirma het twee tipes enjins vir motorfietse ontwerp. Die twee motorfietse word getoets vir die tyd (in sekondes) wat dit hulle neem om te versnel van 0 km/h tot 60 km/h.

	Toets 1	Toets 2	Toets 3	Toets 4	Toets 5	Toets 6	Toets 7	Toets 8	Toets 9	Toets 10
Fiets 1	1,55	1,00	0,92	0,80	1,49	0,71	1,06	0,68	0,87	1,09
Fiets 2	0,9	1,0	1,1	1,0	1,0	0,9	0,9	1,0	0,9	1,1

- (a) Watter maatstaf van sentrale neiging behoort gebruik te word vir hierdie data?
 (b) Bereken die maatstaf van sentrale neiging wat jy gekies het in (a), vir elke motorfiets.
 (c) Watter motorfiets sou jy kies, gebaseer op hierdie inligting? Neem kennis van die akkuraatheid van die getalle in elke stel toetse.
4. In 'n verkeersopname, word 'n willekeurige steekproef van 50 motoriste gevra oor die afstand wat hulle elke dag werk toe ry. Die informasie word getoon in die tabel hieronder:

Afstand (km)	Telling
$0 < d \leq 5$	4
$5 < d \leq 10$	5
$10 < d \leq 15$	9
$15 < d \leq 20$	10
$20 < d \leq 25$	7
$25 < d \leq 30$	8
$30 < d \leq 35$	3
$35 < d \leq 40$	2
$40 < d \leq 45$	2

- (a) Vind die benaderde gemiddelde van die data.
- (b) Watter persentasie van die steekproef ry
- minder as 15 km?
 - meer as 30 km?
 - tussen 16 km en 30 km daaglik?
- (c) Teken 'n histogram om die data voor te stel.
5. 'n Maatskappy wil die opleidingsprogram in sy fabriek evalueer. Hulle gee dieselfde taakopdrag aan opgeleide en onopgeleide werknemers en meet die tyd in sekondes wat dit die werkers neem om die taak te voltooi.

Opgeleide	121	137	131	135	130
	128	130	126	132	127
	129	120	118	125	134
Onopgeleide	135	142	126	148	145
	156	152	153	149	145
	144	134	139	140	142

- (a) Vind die mediane en kwartiele vir beide stelle data.
- (b) Vind die interkwartielwydtes vir beide stelle data.
- (c) Lewer kommentaar op die resultate.
- (d) Teken 'n mond-en-snor diagram wat die vyf-getal-opsomming illustreer, vir elke dataset.
6. 'n Klein firma het 9 mense in diens. Die jaarlikse salarisse van die werknemers is:

R 600 000	R 250 000	R 200 000
R 120 000	R 100 000	R 100 000
R 100 000	R 90 000	R 80 000

- (a) Vind die gemiddelde van hierdie salarisse

- (b) Vind die modus
- (c) Vind die mediaan
- (d) Watter een van die drie getalle sou jy gebruik om te onderhandel oor salarisverhogings as jy 'n vakbondbeampte is? Waarom?

Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge

1. Mediaan = $\frac{41 + 60 + 47 + 42 + 44 + 42 + 47}{7}$
= 44

2. Modus = 6

3.(a) Gemiddelde en modus. Die gemiddelde sal ons die gemiddelde versnelling tyd gee, tensy die modus ons die tyd wat die meeste verkry is sal gee.

(b) Vir fiets 1 die gemiddelde is 1,02 s en daar is nie 'n modus nie want daar is geen waarde wat meer as een keer plaasvind.

Vir fiets 2 die gemiddelde is 1,0 s en daar is twee modi 1,0 en 0,9.

(c) Dit sal moeilik wees om te kies. Alhoewel fiets 1 blyk om beter te doen as fiets 2 van die gemiddelde af, die data vir fiets 2 is minder akkuraat as dié vir fiets 1 (dit het net een desimale plek). As ons die gemiddelde vir fiets 1 bereken om deur net 1 desimale plek te gebruik, sal ons 0,9 s kry. Dit sal fiets 2 beter maak. Verder, fiets 2 lewer meer konsekwent getalle. Dus sal fiets 2 waarskynlik 'n beter keuse wees, maar meer inligting of meer akkurate inligting verkry moet word.

4.(a) Gemiddelde = $\frac{4(3) + 5(8) + 9(13) + 10(18) + 7(23) + 8(28) + 3(33) + 2(38) + 2(43)}{50}$
= 19,9

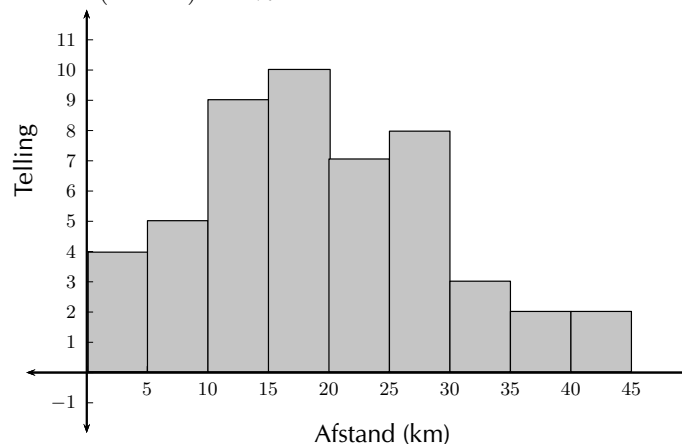
(b) i. Daar was 18 bestuurders wat minder as 15 km gery het.

Dus $\frac{18}{50} \times 100 = 38\%$

ii. Daar was 7 bestuurders wat minder as 30 km gery het.

Dus $\frac{7}{50} \times 100 = 14\%$

iii. $100 - (38 - 14) = 50\%$



5.(a) Eerstens, orde die datastelle vir albei opgeleide en onopgeleide personeel.

Opgeleide: 118, 120, 121, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 130, 131, 132, 134, 135, 137

Onopgeleide: 126, 134, 135, 139, 140, 142, 142, 144, 145, 145, 148, 149, 152, 153, 156

Daar is 15 waardes in elke datastel.

Posisie van die mediaan is $\frac{15+1}{2} = 8$.

Vir die opgeleide personeel is dit 129 en vir die onopgeleide personeel is dit 144.

Posisies van die kwartiele is $\frac{15}{4} = 3,75$.

Vir die opgeleide personeel: $Q_1 = 125$ en $Q_3 = 132$.

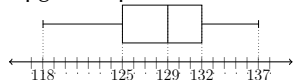
Vir die onopgeleide personeel: $Q_1 = 139$ en $Q_3 = 149$.

(b) Interkwartielwydte vir die opgeleide personeel: $Q_3 - Q_1 = 7$.

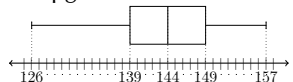
Interkwartielwydte vir die onopgeleide personeel: $Q_3 - Q_1 = 10$.

(c) Die mediaan van die onopgeleide personeel is hoër as dié van die opgeleide personeel. Verder, die onopgeleide personeel get 'n groter interkwartielwydte as die opgeleide personeel. Daar is 'n paar bewyse dat die opleidingsprogram mag werk.

(d) Opgeleide personeel:



Onopgeleide werknemers:



6.(a) Gemiddelde = $\frac{1\,640\,000}{9} = 182\,222,22$

(b) Modus is R 100 000.

(c) Eerstens, orde die datastelle. Om dit makliker om met die getalle te werk, deel ons elkeen deur 100 000.

Die geordende stel is 80, 90, 100, 100, 100, 120, 200, 250, 600.

Die mediaan is by posisie 5 en R 100 000 is.

(d) Óf die modus of die mediaan.

Die gemiddelde is deur die een salaris van R 600 000 geskeedf(verskuif). Die modus gee ons 'n beter raming van wat die personeel eintlik verdien. Die mediaan gee ons ook 'n redelike akkurate voorstelling van wat die personeel verdien.

Oefening 10 - 1

1. 'n Sak bevat 6 rooi balle, 3 blou, 2 groen en 1 wit bal. 'n Bal word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid van die volgende:
 - (a) rooi
 - (b) blou of wit
 - (c) nie groen
 - (d) nie groen of rooi
2. 'n Speelkaart word willekeurig gekies uit 'n pak van 52 kaarte. Wat is die waarskynlikheid van die volgende:
 - (a) die 2 van harte
 - (b) 'n rooi kaart
 - (c) 'n prentkaart
 - (d) 'n 'A'-getal
 - (e) 'n getal kleiner as 4
3. Ewe getalle in die interval 2 tot 100 word op kaarte geskryf. Wat is die waarskynlikheid om 'n veelvoud van 5 op 'n willekeurig wyse te kies?

Oplossings vir Oefening 10 - 1

- 1.(a) $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
(b) $\frac{(3+1)}{12} = \frac{1}{3}$
(c) $1 - \left(\frac{2}{12}\right) = \frac{5}{6}$
(d) $1 - \frac{(2+6)}{12} = \frac{4}{12}$
 $= \frac{1}{3}$
- 2.(a) $\frac{1}{52}$ (net een in die pak)
(b) $\frac{1}{2}$ (helfte van die kaarte is rooi, helfte is swart)
(c) $\frac{3}{13}$ (vir elke troef van 13 karte is daar drie prentkarte: J, Q, K)
(d) $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ (vier "Aces" in die pak)
(e) $\frac{3}{13}$ (vir elke troef van 13 kaarte, is daar drie kaarte minder as 4: A, 2 en 3)

3. Daar is 50 kaarte. Hulle is almal ewe.

Alle ewe getalle wat ook veelvoude van 5 is, is veelvoude van 10 (10, 20, ..., 100).

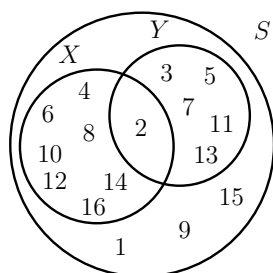
Daar is 10 van hulle.

Dus is die waarskynlikheid $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$.

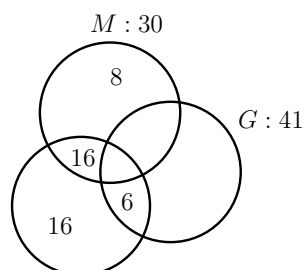
Oefening 10 - 2

- Laat S die versameling heelgetalle van 1 tot 16 aandui, X die versameling ewe getalle van 1 tot 16 en Y die versameling priemgetalle van 1 tot 16
 - Teken 'n Venn-diagram wat S , X and Y akkuraat aandui.
 - Vind $n(S)$, $n(X)$, $n(Y)$, $n(X \cup Y)$, $n(X \cap Y)$.
- Daar is 79 Graad 10 leerders in die skool. Almal neem Wiskunde, Aardrykskunde of Geskiedenis. 41 neem Aardrykskunde, 36 neem Geskiedenis en 30 neem Wiskunde. 16 neem Wiskunde en Geskiedenis, 6 neem Aardrykskunde en Geskiedenis, 8 neem net Wiskunde en daar is 16 wat slegs Geskiedenis neem.
 - Teken 'n Venn-diagram om hierdie inligting te illustreer.
 - Hoeveel leerders neem Wiskunde en Aardrykskunde, maar nie Geskiedenis nie?
 - Hoeveel leerders neem net Aardrykskunde?
 - Hoeveel leerders neem al drie vakke?
- Papiere word genommer van 1 tot 12 en in 'n houer geplaas en die houer geskud. Een papier op 'n slag word getrek en weer teruggeplaas.
 - Wat is die monsterruimte, S ?
 - Skryf die versameling A neer, wat die gebeurtenis voorstel van die trek van 'n papier met 'n faktor van 12 daarop.
 - Skryf die versameling B neer, wat die gebeurtenis voorstel van die trek 'n papier gemerk met 'n priemgetal.
 - Gebruik 'n Venn-diagram om A , B and S voor te stel.
 - Vind
 - $n(S)$
 - $n(A)$
 - $n(B)$

Oplossings vir Oefening 10 - 2



1.



2. (a) $H : 36$

(b) Elke leerder moet presies een van die volgende doen:

- net aardryskunde neem;
- net wiskunde en/of geskiedenis neem;

Daar is $30 + 36 - 16 = 50$ leerders wat die tweede opsie neem dus moet daar $79 - 50 = 29$ leerders wees wat net aardryskunde neem.

Elke leerder moet presies een van die volgende doen:

- net aardryskunde neem;
- net wiskunde neem;
- geskiedenis neem;
- aardryskunde en wiskunde neem maar nie geskiedenis nie;

Daar is 29, 8 en 36 van die eerste drie dus is die antwoord vir b):

$$79 - 29 - 8 - 36 = 6 \text{ leerders}$$

(c) Alreeds bereken: 29

(d) Elke leerder moet presies een van die volgende doen:

- Aardryskunde
- Net wiskunde
- Net geskiedenis
- wiskunde en geskiedenis maar nie aardryskunde nie

As ons dieselfde metode as voorheen gebruik, is die getal leerders in die laaste groep:

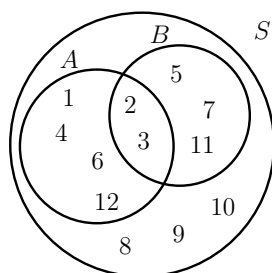
$$79 - 41 - 8 - 16 = 14$$

Maar 16 leerders neem wiskunde en geskiedenis dus moet daar $16 - 14 = 2$ leerders wat al drie neem.

3. (a) $S = \{1; 2; \dots; 12\}$

(b) $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

(c) $B = \{2; 3; 5; 7; 11\}$



(d)

(e) i. 12

ii. 6

iii. 5

Oefening 10 - 3

1. 'n Kas bevat gekleurde blokkies. Die aantal van elke kleur word in die onderstaande tabel aangedui.

Kleur	Pers	Oranje	Wit	Pink
Aantal blokkies	24	32	41	19

'n Blokkie word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat die blokkie die volgende kleur sal wees:

- (a) pers
 (b) pers of wit
 (c) pienk en oranje
 (d) nie oranje nie?
2. 'n Klein skooltjie het 'n klas met kinders van verskillende ouderdomme. Die tabel gee die aantal kinders van elke ouderdom in die klas.

	3 jaar oud	4 jaar oud	5 jaar oud
Manlik	2	7	6
Vroulik	6	5	4

As 'n leerder willekeurig gekies word, wat is die waarskynlikheid dat die leerder die volgende sal wees:

- (a) vroulik
 (b) 4 jaar oud en manlik
 (c) 3 of 4 jaar oud
 (d) 3 en 4 jaar oud
 (e) nie 5 nie
 (f) 3 of vroulik?
3. Fiona het 85 skyfies, genummer van 1 to 85. Indien 'n skyfie willekeurig gekies word, wat is die waarskynlikheid dat die getal:
- (a) eindig met 5
 (b) 'n veelvoud van 3 is
 (c) 'n veelvoud van 6 is

- (d) 65 is
- (e) nie 'n veelvoud van 5 is nie
- (f) 'n veelvoud van 4 of 3 is
- (g) 'n veelvoud van 2 en 6 is
- (h) 1 is?

Oplossings vir Oefening 10 - 3

1. Voor ons die vrae antwoord moet ons eerstens bereken hoeveel blokkies daar in totaal is. Die gee die monsterruimte

$$\begin{aligned}n(S) &= 24 + 32 + 41 + 19 \\ &= 116\end{aligned}$$

- (a) Die waarskynlikheid dat 'n blokkie pers is, is:

$$\begin{aligned}P(\text{pers}) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ P(\text{pers}) &= \frac{24}{116} \\ P(\text{pers}) &= 0,21\end{aligned}$$

- (b) Die waarskynlikheid dat 'n blokkie óf pers of wit is, is:

$$\begin{aligned}P(\text{pers} \cup \text{wit}) &= P(\text{pers}) + P(\text{wit}) - P(\text{pers} \cap \text{wit}) \\ &= \frac{24}{116} + \frac{41}{116} - \frac{24}{116} \times \frac{41}{116} \\ &= 0,64\end{aligned}$$

- (c) Aangesien een blokkie nie twee kleure kan hê nie, is die waarskynlikheid van hierdie gebeurtenis 0.

- (d) Ons bereken eerstens die waarskynlikheid dat 'n blokkie oranje is:

$$P(\text{oranje}) = \frac{32}{116} = 0,28$$

die waarskynlikheid dat 'n blokkie nie oranje is nie:

$$\begin{aligned}P(\text{nie oranje}) &= 1 - 0,28 \\ &= 0,72\end{aligned}$$

2. Ons bereken die totale getal leerlinge by die skool :

$$6 + 2 + 5 + 7 + 4 + 6 = 30$$

- (a) Die totale getal van vroulike kinders is $6 + 5 + 4 = 15$.

Die waarskynlikheid dat 'n ewekansig gekies kind vroulik sal wees is:

$$\begin{aligned}P(\text{vroulik}) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ P(\text{vroulik}) &= \frac{15}{30} \\ P(\text{vroulik}) &= 0,5\end{aligned}$$

- (b) Die waarskynlikheid van om 'n kind wat 4 jaar oud en manlike is te kies is:

$$\begin{aligned}P(\text{manlik}) &= \frac{7}{30} \\ &= 0,23\end{aligned}$$

- (c) Daar is $6 + 2 + 5 + 7 = 20$ kinders wat van 3 of 4 is.

Die waarskynlikheid van om 'n kind van 3 of 4 is ewekansig te kies is:

$$\frac{20}{30} = 0,67$$

- (d) 'n kind kan nie 3 en 4 wees nie dus is die waarskynlikheid 0.

- (e) Dit is dieselfde asof 'n ewekansig kinder óf 3 óf 4 is, en dus is 0,67.

- (f) Die waarskynlikheid dat 'n kind óf 3 óf vroulik is, is:

$$P(3 \cup \text{vroulik}) = P(3) + P(\text{vroulik}) - P(3 \cap \text{vroulik})$$

$$= \frac{10}{30} + 0,5 - \frac{10}{30} \times \frac{15}{30}$$

$$= 0,67$$

3. (a) Die versameling skyfies wat met 5 eindig is: {5; 15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85}.

Hierdie het 9 elemente.

Die waarskynlikheid van om 'n skyfie wat met 5 eindig te kies is:

$$P(5) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$P(5) = \frac{9}{85}$$

$$P(5) = 0,11$$

- (b) Die versameling van alle skyfies wat veelvoude van 3 is, is: {3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 48; 51; 54; 57; 60; 63; 66; 69; 72; 75; 78; 81; 84}.

Hierdie het 28 elemente.

Die waarskynlikheid van om 'n skyfie wat 'n veelvoud van 3 is te kies is: $P(3_m) = \frac{28}{85} = 0,33$

- (c) Die versameling van alle skyfies wat veelvoude van 6 is, is: {6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84}. This set has 14 elemente. Die waarskynlikeheid van om 'n skyfie wat 'n veelvoud van 6 is te kies is:

$$P(6_m) = \frac{14}{85}$$

$$= 0,16$$

- (d) is net een element in hierdie versameling dus is die waarskynlikeheid van om 65 te kies is:

$$P(65) = \frac{1}{85}$$

$$= 0,01$$

- (e) Die versameling van alle skyfies wat veelvoude van 5 is, is: {5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85}. Hierdie versameling het 17 elemente.

Dus is die getal skyfies wat nie veelvoude van 5: $85 - 17 = 68$.

Die waarskynlikheid van om 'n skyfie wat nie 'n veelvoud van 5 is te kies is:

$$P(\text{nie } 5_m) = \frac{68}{85}$$

$$= 0,80$$

- (f) In deel b), het ons die waarskynlikheid vir 'n skyfie wat 'n veelvoud van 3 is bereken. Nou bereken ons die getal elemente in die versameling van alle skyfies wat veelvoude van 4 is: {4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76; 80; 84}. Hierdie het 28 elemente.

Die waarskynlikeheid dat 'n skyfie 'n veelvoud van óf 3 of 4 is, is:

$$P(3_m \cup 4_m) = P(3_m) + P(4_m) - P(3_m \cap 4_m)$$

$$= 0,33 + \frac{28}{85} - 0,33 \times \frac{28}{85}$$

$$= 0,55$$

- (g) Die versameling van alle skyfies wat veelvoude van 2 en 6 is is dieselfde as die versameling van alle skyfies van 'n veelvoud van 6 is. Dus is die waarskynlikheid van om 'n skyfie wat beide 'n veelvoud van 2 en van 6 is, is: 0,16

- (h) Daar is net 1 element in hierdie versameling, dus is die waarskynlikheid 0,01.

Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. 'n Groep van 45 kinders is gevra of hulle Frosties en/of Strawberry Pops eet. 31 eet beide en 6 eet net Frosties. Wat is die waarskynlikheid dat 'n kind wat willekeurig

gekie word net Strawberry Pops eet?

2. In 'n groep van 42 leerders het almal behalwe 3 'n pakkie skyfies of 'n Fanta of beide gehad. As 23 'n pakkie skyfies gehad het, en 7 hiervan het ook 'n Fanta gehad, wat is die waarskynlikheid dat 'n leerder wat willekeurig gekies word die volgende het:
 - (a) beide skyfies en Fanta
 - (b) net Fanta
3. Gebruik 'n Venn-diagram om die volgende waarskynlikhede van 'n dobbelsteen wat gerol word te bereken:
 - (a) 'n veelvoud van 5 en 'n onewe getal
 - (b) 'n getal wat nie 'n veelvoud van 5 is nie en ook nie 'n onewe getal nie
 - (c) 'n getal wat nie 'n veelvoud van 5 is nie, maar onewe.
4. 'n Pakkie het geel en pienk lekkers. Die waarskynlikheid om 'n pienk lekker te kies is $\frac{7}{12}$. Wat is die waarskynlikheid om 'n geel lekker uit te haal?
5. In 'n parkeerterrein met 300 motors is daar 190 Opels. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste motor wat uitry die volgende is:
 - (a) 'n Opel
 - (b) nie 'n Opel nie
6. Tamara het 18 los sokkies in 'n laai. Agt van hierdie is oranje en twee pienk. Bereken die waarskynlikheid dat die eerste sokkie wat willekeurig gekies word die volgende is:
 - (a) oranje
 - (b) nie oranje
 - (c) pienk
 - (d) nie pienk
 - (e) oranje of pienk
 - (f) nie oranje of pienk nie
7. Daar is 9 broodkoekies, 4 gemmerkoekies, 11 sjokoladekoekies en 18 Jambos op 'n bord. As 'n koekie willekeurig gekies word, wat is die waarskynlikheid dat:
 - (a) dit 'n gemmerkoekie of 'n Jambo is
 - (b) dit nie 'n broodkoekie is nie
8. 280 kaartjies is verkoop in 'n lotery. Ingrid het 15 gekoop. Wat is die waarskynlikheid dat Ingrid:
 - (a) die prys wen
 - (b) nie die prys wen nie
9. Die kinders in 'n kleuterskool is geklassifiseer per haarkleur en oogkleur. 44 het rooi hare en nie bruin oë nie, 14 het bruin oë maar nie rooi hare nie en 40 het nie bruin oë of rooi hare nie.
 - (a) Hoeveel kinders is in die skool?
 - (b) Wat is die waarskynlikheid dat 'n kind wat willekeurig gekies word die volgende het:
 - i. bruin oë
 - ii. rooi hare
 - (c) 'n Kind met bruin oë word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat hierdie kind rooi hare het?
10. 'n Houer bevat pers, blou en swart lekkers. Die waarskynlikheid dat 'n lekker wat

willekeurig gekies word pers is, is $\frac{1}{7}$, en die waarskynlikheid dat dit swart sal wees is $\frac{3}{5}$.

(a) As ek 'n lekker willekeurig kies, wat is die waarskynlikheid dit die volgende sal wees:

- i. pers of blou
- ii. swart
- iii. pers

(b) As daar 70 lekkers in die houer is, hoeveel perses is daar?

(c) $\frac{2}{5}$ van die pers lekkers in (b) het strepe en die res nie, hoeveel pers lekkers het strepe?

11. Vir elk van die volgende, teken 'n Venn-diagram om die situasie voor te stel en vind 'n voorbeeld ter illustrasie:

(a) 'n monsterruimte waarin daar twee gebeurtenisse is wat nie ondeling uitsluitend is nie

(b) 'n monsterruimte waarin daar twee komplementêre gebeurtenisse is

12. Gebruik 'n Venn-diagram om te bewys dat die waarskynlikheid van voorkoms van gebeurtenis A of B (A en B is nie onderling uitsluitend nie) gegee word deur:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

13. Al die klawerkaarte word uit 'n pak kaarte gehaal. Die res word dan geskommel en een kaart gekies. Die kaart word dan teruggeplaas voor die volgende een gekies word.

(a) Wat is die monsterruimte?

(b) Vind 'n versameling om gebeurtenis P , die trek van 'n prentkaart, voor te stel.

(c) Vind 'n versameling om gebeurtenis N , die trek van 'n nommerkaart, voor te stel.

(d) Vertoon die bostaande gebeurtenisse in 'n Venn-diagram.

(e) Wat is 'n goeie beskrywing van die versamelings P en N ? (Wenk: Vind enige elemente van P in N en van N in P).

14. 'n Opname was by Mutende Primêre Skool uitgevoer om vas te stel hoeveel van die 650 leerders vetkoek, en hoeveel lekkers tydens pouse koop. Die volgende was bevind:

- 50 leerders het niks gekoop nie
- 400 leerders het vetkoek gekoop
- 300 leerders het lekkers gekoop

(a) Vertoon hierdie inligting met 'n Venn-diagram

(b) Indien 'n leerder willekeurig gekies is, bereken die waarskynlikheid dat die leerder die volgende koop:

- i. net lekkers
- ii. net vetkoek
- iii. nie vetkoek of lekkers nie
- iv. vetkoek en lekkers
- v. vetkoek of lekkers

15. In 'n opname by Lwandani se Sekondêre Skool is 80 mense gevra of hulle die Sowetan of die Daily Sun of albei koerante lees. Die verslag toondat 45 mense die Daily Sun lees, 30 die Sowetan lees en 10 lees nie een van die twee nie. Gebruik 'n Venn-diagram om die persentasie van mense te vind wat:

- (a) net die Daily Sun lees
- (b) net die Sowetan lees

(c) die Daily Sun en die Sowetan lees

Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge

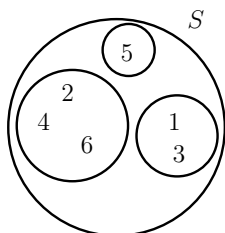
1. $45(\text{Alles}) - 6(\text{net Frosties}) - 31(\text{albei}) = 8(\text{net Strawberry Pops})$

Dus $\frac{8}{45} = 0,18$

2. (a) $\frac{7}{42} = \frac{1}{6}$

(b) $42 - 3 = 39$ het te minste een gehad het, en $23 + 7$ het 'n pakkie skyfies gehad het, dan $39 - 30 = 9$ het net Fanta gehad het.

$\frac{9}{42} = \frac{3}{14}$



- 3.

Veelvoude van 5 : 5

Onewe getal: 1, 3, 5

Nie een: 2, 4, 6

Albei: 5

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(c) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

4. $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

5. (a) $\frac{190}{300} = \frac{19}{30}$

(b) $1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$

6. (a) $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

(b) $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

(c) $\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

(d) $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

(e) $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

(f) $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

7. (a) Totale getal koekies is $9 + 4 + 11 + 18 = 42$

$\frac{4}{42} + \frac{18}{42} = \frac{22}{42}$
 $= \frac{11}{21}$

(b) $1 - \frac{9}{42} = 1 - \frac{3}{14}$
 $= \frac{11}{14}$

8. (a) $\frac{15}{280} = \frac{3}{56}$

(b) $1 - \frac{3}{56} = \frac{53}{56}$

9. (a) Elke 4 groepe is wedersyds uitsluitend, dus die totale getal kinders is $44 + 14 + 5 +$

$40 = 103.$

(b) i. $\frac{19}{103}$

ii. $\frac{58}{103}$
 (c) $\frac{14}{(14+5)} = \frac{14}{19}$

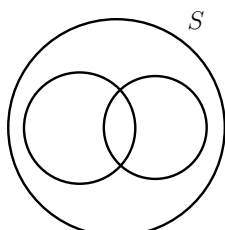
10. (a) i. Dieselfde as nie swart nie: $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

ii. $\frac{3}{5}$

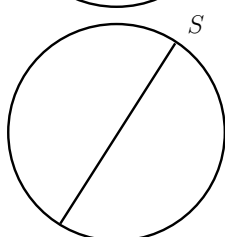
iii. $\frac{1}{7}$

(b) $\frac{1}{7} \times 70 = 10$

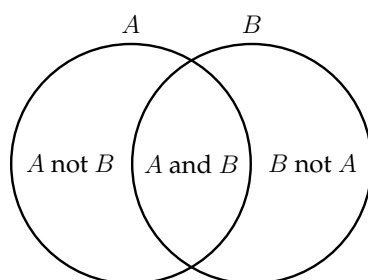
(c) $10 \times \frac{2}{5} = 4$



11. (a)



(b)

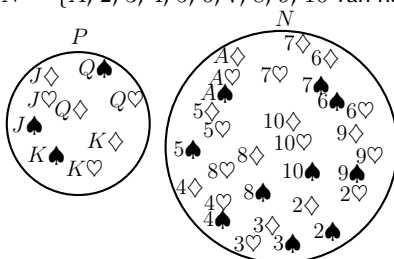


12.

13. (a) {pak kaarte sonder die klawers}

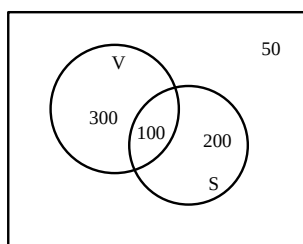
(b) $P = \{J; Q; K \text{ van harte, diamante of skoppens}\}$

(c) $N = \{A; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \text{ van harte, diamante of skoppens}\}$



(d)

(e) Wedersyds uitsluitend en komplementêre.



14. (a)

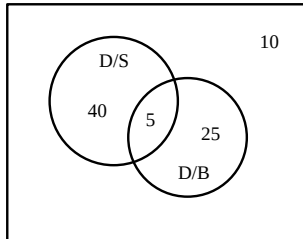
(b) (i) $\frac{200}{650} = 30,8\%$

(ii) $\frac{300}{650} = 46,2\%$

(iii) $\frac{50}{650} = 7,7\%$

(iv) $\frac{100}{650} = 15,4\%$

(v) $\frac{600}{650} = 92,3\%$



15.

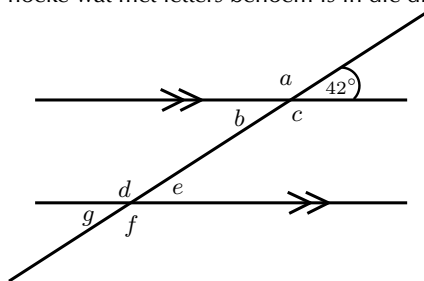
(a) $\frac{40}{80} = 50\%$

(b) $\frac{25}{80} = 31,25\%$

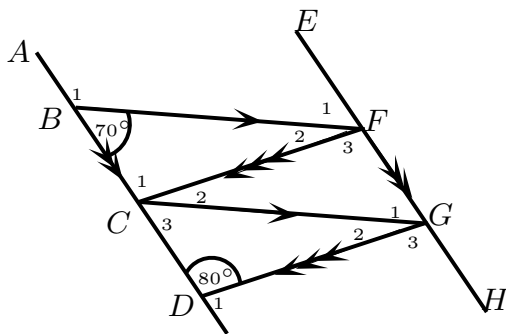
(c) $\frac{5}{80} = 6,25\%$

Oefening 11 - 1

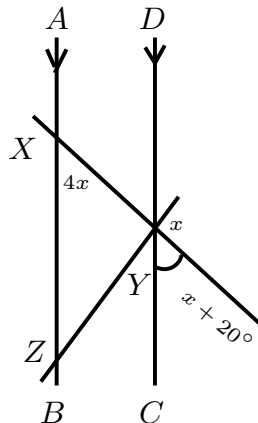
1. Gebruik aangrenzende, ooreenkomstige, verwisselende en ko-binnehoeke om al die hoek wat met letters benoem is in die diagram hieronder, te vind:



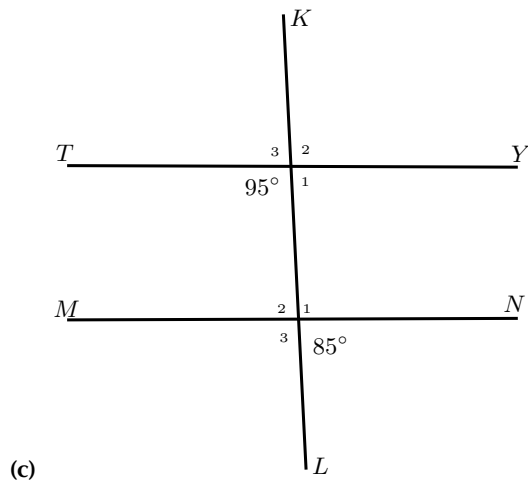
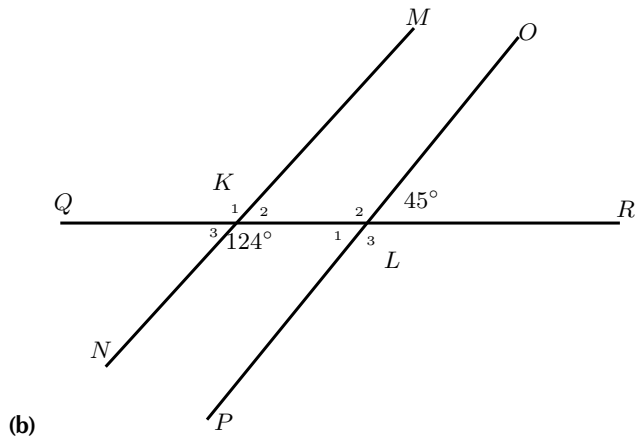
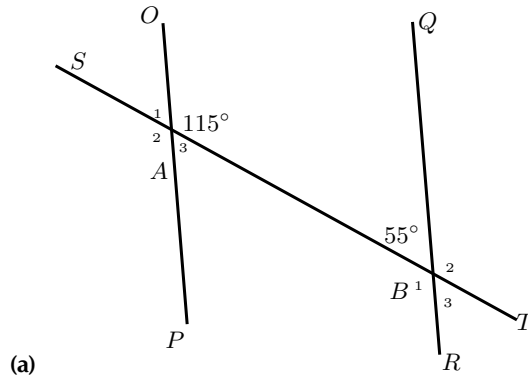
2. Vind al die onbekende hoek in die figuur hieronder:



3. Vind die waarde van x in die figuur hieronder:



4. Bepaal of daar pare ewewydige lyne is in die volgende figure:



5. As AB ewewydig is aan CD en AB ewewydig is aan EF , bewys dat CD ewewydig is aan EF .



Oplossings vir Oefening 11 - 1

$$\begin{aligned}
 1. \quad a &= 138^\circ \\
 b &= 42^\circ \\
 c &= 138^\circ \\
 d &= 138^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e &= 42^\circ \\
 f &= 138^\circ \\
 g &= 42^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \hat{B}_1 &= 110^\circ \\
 \hat{C}_1 &= 80^\circ \\
 \hat{C}_2 &= 30^\circ \\
 \hat{C}_3 &= 70^\circ \\
 \hat{D}_1 &= 100^\circ \\
 \hat{F}_1 &= 70^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_2 &= 30^\circ \\
 \hat{F}_3 &= 80^\circ \\
 \hat{G}_1 &= 70^\circ \\
 \hat{G}_2 &= 30^\circ \\
 \hat{G}_3 &= 80^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad x + 60^\circ + x - 20^\circ &= 180^\circ \\
 2x &= 180^\circ - 40^\circ \\
 2x &= 140^\circ \\
 \therefore x &= 70^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad (a) \quad &\text{Vir binnehoeke } 115^\circ + 55^\circ = 170^\circ \\
 &\text{as } \parallel \text{ die som sou } 180^\circ \text{ gewees het } \therefore \text{ is die lyne nie ewewydig nie.}
 \end{aligned}$$

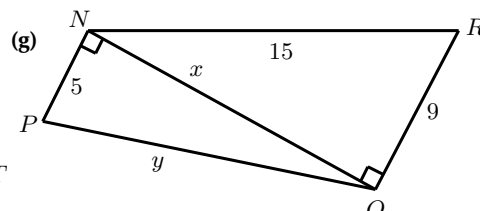
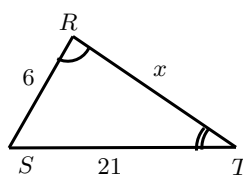
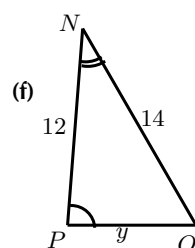
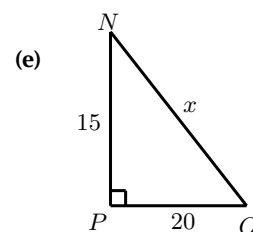
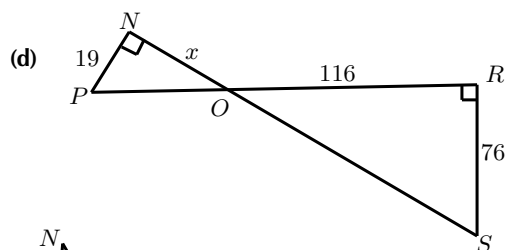
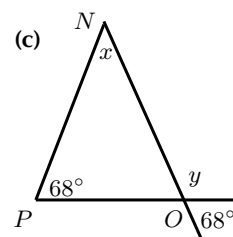
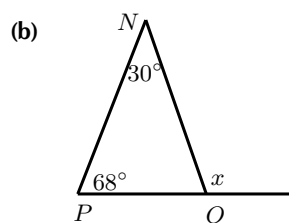
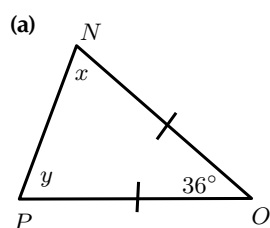
$$\begin{aligned}
 (b) \quad K_2 &= 180^\circ - 124^\circ - 56^\circ \\
 &\text{as } MN \parallel OP \text{ dan sal } \hat{K}_2 = 56^\circ \text{ gelyk an } \hat{L} = 45^\circ \text{ wees} \\
 &\therefore \text{ is } MN \text{ en } OP \text{ nie ewewydig nie.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad &\text{Laat } \hat{U} \text{ die kruispunt van lyne } KL \text{ en } TY \text{ wees en laat } \hat{V} \text{ die kruispunt van lyne} \\
 &KL \text{ en } MN \text{ wees.} \\
 \hat{U}_4 &= 96^\circ \\
 \therefore \hat{U}_1 &= 180^\circ - 95^\circ \quad (\text{Hoeke op 'n reguitlyn}) \\
 \therefore \hat{U}_1 &= 85^\circ \\
 \text{Also, } \hat{U}_1 &= 85^\circ = \hat{V}_4 \\
 &\text{Hierdie is ooreenkomstige hoeke} \\
 \therefore TY &\parallel MN
 \end{aligned}$$

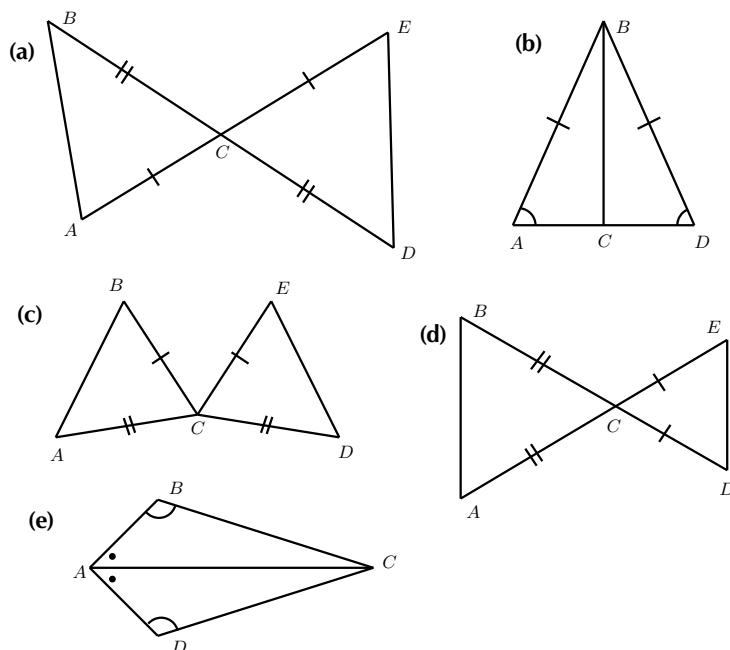
$$\begin{aligned}
 5. \quad &\text{As } a = 2 \\
 &\text{en } b = a \\
 &\text{dan weet ons dat } b = 2 \\
 &\text{Soortgelyk as } AB \parallel CD \\
 &\text{en } EF \parallel AB \\
 &\text{dan weet ons dat } EF \parallel CD
 \end{aligned}$$

Oefening 11 - 2

1. Bereken die onbekende verenerlikes in elk van die volgende figure.



2. Bepaal of elk van die volgende pare driehoeke kongruent is of nie. Gee redes vir jou antwoorde. As daar nie genoeg inliging is om 'n besluit te neem nie, sê hoekom.



Oplossings vir Oefening 11 - 2

1. (a) Die driehoek is gelykbenig,

$$\therefore x = y$$

$$180^\circ = 36^\circ - 2x$$

$$2x = 144^\circ$$

$$\therefore x = y = 72^\circ$$

- (b) x is 'n buitehoek

$$\therefore x = 30^\circ + 68^\circ$$

$$= 98^\circ$$

- (c) y is 'n buitehoek

$$\therefore y = x + 68^\circ = 112^\circ$$

$$x = 112^\circ - 68^\circ = 44^\circ$$

- (d) Binnehoeke van 'n driehoek voeg tot 180°

$$\therefore \hat{P} = 180^\circ - \hat{N} - \hat{N}OP$$

$$\text{en } \hat{S} = 180^\circ - \hat{R} - \hat{R}OS$$

$$\hat{N} = \hat{R} = 90^\circ \text{ en } \hat{N}OP = \hat{R}OP \text{ (teenoorstaene hoeke)}$$

$$\hat{P} = \hat{S}$$

Dus is $\triangle NPO$ en $\triangle ROS$ soortgelyk want hulle dieselfde hoeke het.

Gelykvormige driehoeke het eweredig kante

$$\therefore \frac{NP}{RS} = \frac{NO}{OR}$$

$$\frac{19}{76} = \frac{x}{116}$$

$$\therefore x = 19 \text{ eenhede}$$

- (e) Van die stelling van Pythagoras het ons

$$x^2 = 15^2 + 20^2$$

$$\therefore x = \sqrt{625}$$

$$= 25 \text{ eenhede}$$

(f) $\triangle NPO \parallel \triangle TSR$ (HHH)

$$\therefore \frac{OP}{NP} = \frac{SR}{TR}$$

$$\frac{y}{12} = \frac{6}{x}$$

$$\therefore xy = 72$$

$$\text{en } \frac{NO}{OP} = \frac{TS}{TR}$$

$$\frac{14}{12} = \frac{21}{x}$$

$$\therefore x = \frac{21 \times 12}{14}$$

$$\therefore x = 18 \text{ eenhede}$$

$$\therefore y(18) = 72$$

$$\therefore y = 4 \text{ eenhede}$$

(g) Van die stelling van Pythagoras:

$$x^2 = 15^2 - 9^2$$

$$x = \sqrt{144} = 12 \text{ eenhede}$$

En

$$y^2 = x^2 + 5^2$$

$$y^2 = 144 + 25$$

$$y = \sqrt{169}$$

$$y = 13 \text{ eenhede}$$

2. (a) $\triangle ABC \equiv \triangle EDC$ (SHS: $BC = CD$, $EC = AC$ en $\hat{BCA} = \hat{ECD}$)

(b) Ons het twee gelyke sye ($AB = BD$ en BC is algemeen vir beide driehoeke) en een gelyke hoek ($\hat{A} = \hat{D}$) maar die sye sluit nie die bekende hoek in nie. Die driehoeke het dus nie 'n SHS nie en is dus nie kongruent nie. (Nota: $\hat{ACB}$ is nie noodwendig gelyk aan $\hat{DCB}$ omdat dit nie gegee is nie dat $BC \perp AD$)

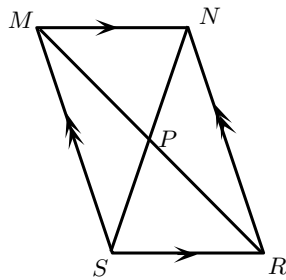
(c) Daar word nie genoeg inligting gegee nie. Ons het ten minste drie feite oor die driehoeke nodig en in hierdie voorbeeld weet ons net twee sye in elke driehoek.

(d) Daar word nie genoeg inligting gegee nie. Alhoewel ons kan bepaal watter hoeke gelyk is, geen gelyke sye word gegee. Al wat ons weet is dat ons twee gelykbenige driehoeke het. Let op hoe hierdie vraag verskil van deel a). In deel a) word gelyke sye in beide driehoeke gegee, in hierdie vraag word dit net gegee dat die sye in dieselfde driehoek gelyk is.

(e) $\triangle ABD \parallel \triangle ADC$ (HHS: CA is 'n algemene sy, en dit word gegee dat twee hoeke gelyk aan mekaar is.)

Oefening 11 - 3

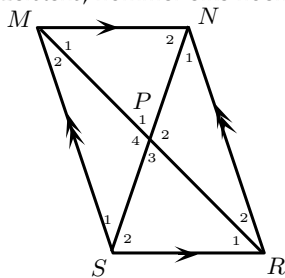
1. Bewys die diagonale van parallellogram $MNRS$ mekaar halveer in P .



Wenk: Gebruik kongruensie.

Oplossings vir Oefening 11 - 3

1. Eerstens, nommer elke hoek op die gegewe diagram:



In $\triangle MNP$ en $\triangle RSP$

$$\hat{M}_1 = \hat{R}_1 \text{ (verwiss. } \angle\text{'e)}$$

$$\hat{P}_1 = \hat{P}_3 \text{ (} MN \parallel SR, \text{ regoorstaene } \angle\text{'e)}$$

$$MN = RS \text{ (teen. sye van parallelogram)}$$

$$\therefore \triangle MNP \parallel \triangle RSP \text{ (HHS)}$$

$$\therefore MP = RP$$

$\therefore P$ is die middlepunt van MR

Soortgelyk, in $\triangle MSP$ en $\triangle RNP$

$$\hat{M}_2 = \hat{R}_2 \text{ (verwiss. } \angle\text{'e)}$$

$$\hat{P}_4 = \hat{P}_2 \text{ (} MN \parallel SR, \text{ vert. teen. } \angle\text{'e)}$$

$$MS = RN \text{ (teen. sye van parallelogram)}$$

$$\therefore \triangle MSP \parallel \triangle RNP \text{ (HHS)}$$

$$\therefore SP = NP$$

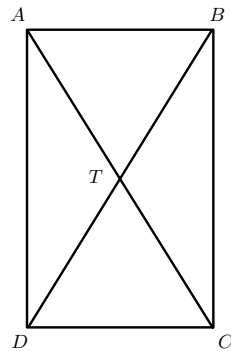
$\therefore P$ is die middlepunt van NS

Dus halveer die hoeklyne mekaar by punt P .

Oefening 11 - 4

1. $ABCD$ is 'n vierhoek. Hoeklyne AC en BD sny by T . $AC = BD$, $AT = TC$, $DT = TB$. Bewys dat:

- (a) $ABCD$ 'n parallelogram is.
(b) $ABCD$ 'n reghoek is.

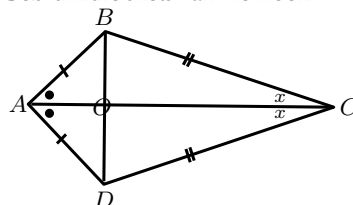


Oplossings vir Oefening 11 - 4

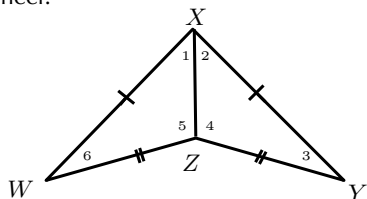
1. (a) $AT = TC$ (gegee)
 $\therefore DB$ halveer AC by T
 en $DT = TB$ (gegee)
 $\therefore AC$ halveer DB by T
 dus is vierhoek $ABCD$ 'n parallelogram (hoeklyne halveer mekaar)
 (b) $AC = BD$ (gegee)
 Dus is $ABCD$ 'n reghoek (hoeklyne is dieselfde lengte)

Oefening 11 - 5

1. Gebruik die skets van vierhoek $ABCD$ om te bewys die hoeklyne is loodreg op mekaar.

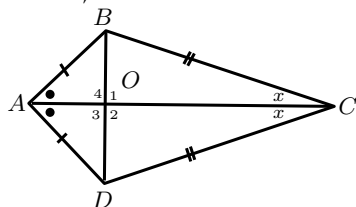


2. Verduidelik waarom $WXYZ$ 'n vlieër is. Skryf al die eienskappe van vierhoek $WXYZ$ neer.



Oplossings vir Oefening 11 - 5

1. Eerstens, nommer die hoeke:



In $\triangle ADB$

laat $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = t$

en laat $\hat{D} = \hat{B} = p$

$\therefore$ in $\triangle ADB$

$$2t + 2p = 180^\circ$$

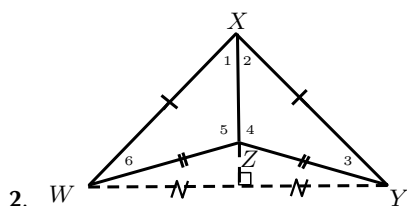
$$\therefore t + p = 90^\circ$$

Maar $\hat{O}_1 = \hat{B} + \hat{A}_1$ (buite $\angle$ = som twee teen. binne $\angle$ 'e)

$$\hat{O}_1 = p + t$$

$$= 90^\circ$$

$$\therefore AC \perp BD$$



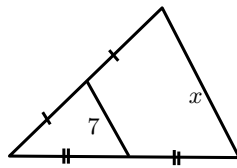
2. Vierhoek $WXYZ$ is 'n vlieër omdat dit twee pare aangrensende sye het wat gelyk in lengte is.

- $\hat{W}_1 = \hat{Y}_1$ (teen. $\angle$ 'e gelyk)
- Hoeklyn tussen gelyke sye halveer die eners hoeklyn: $WP + PY$
- $\hat{X}_1 = \hat{X}_2$ (hoeklyn halveer binne $\angle$)
 $\hat{Y}_1 = \hat{Y}_2$ (hoeklyn halveer binne $\angle$)
- $WY \perp PX$

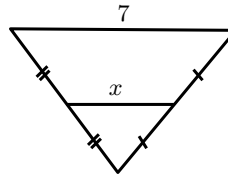
Oefening 11 - 6

1. Vind x en y in elk van die volgende:

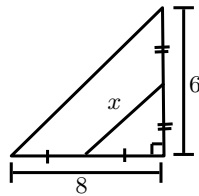
(a)



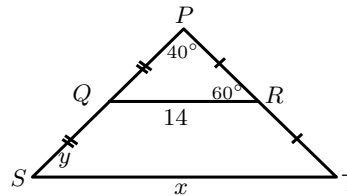
(b)



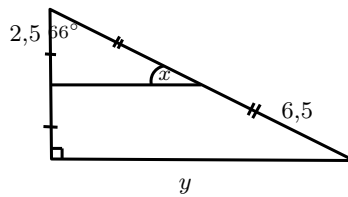
(c)



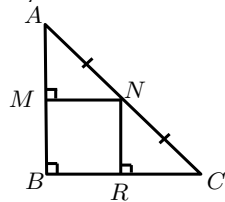
(d)



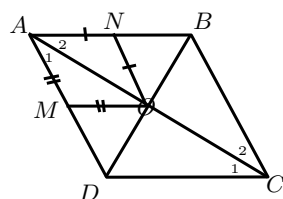
(e)



2. Wys dat M die middelpunt is van AB en dat $MN = RC$.



3. $ABCD$ is 'n ruit met $AM = MO$ en $AN = NO$. Bewys $ANOM$ is ook 'n ruit.



Oplossings vir Oefening 11 - 6

1. (a) $x = 14$ eenhede
 (b) $x = 3,5$ eenhede
 (c) $x = 5$ eenhede
 (d) $x = 28$ eenhede; $y = 80^\circ$
 (e) $x = 24^\circ$; $y = 12$ eenhede

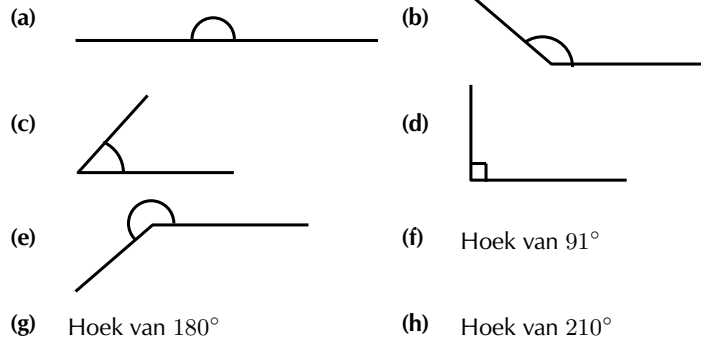
2. N is die middelpunt van AC (gegee: $AN = NC$)
 en $\hat{B} = \hat{M} = 90^\circ$ (gegee)
 Maar hierdie is gelyke, ooreenkomstige hoeke
 $MN \parallel BR$
 $BM \parallel RN$
 $\therefore M$ is die middlepunt van die lyn AB

 $\therefore MN = \frac{1}{2}BC$ (middelpunt stelling)
 maar $MN = BR$ (teen. sye van parallelogram $MNRB$)
 en $BL = BR + RC$
 $\therefore MN = \frac{1}{2}(BR + RC)$
 $2MN = MN + RC$
 $\therefore MN = RC$

3. In $\triangle AMO$ en $\triangle ANO$
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (gegee ruit $ABCD$, hoeklyn AC halveer $\hat{A}$)
 $\therefore \hat{A}_1 = \hat{O}_1$ ($\angle$ 'e teen. gelyke sye, gegee $AM = MO$ en $AN = NO$)
 en $\hat{A}_2 = \hat{O}_2$
 $\therefore \hat{A}_2 = \hat{O}_1$ en $\hat{A}_1 = \hat{O}_2$
 maar hierdie is verwiss. $\angle$ 'e
 $\therefore AN \parallel MO$ en $AM \parallel NO$
 $\therefore AMON$ is 'n parallelogram
 $\therefore AM = NO$ (teen. sides parallelogram is gelyk)
 $AM = MO = ON = NO$
 $\therefore AMON$ is 'n ruit (alle kante gelyk en ewewydig)

Einde van Hoofstuk Oefeninge

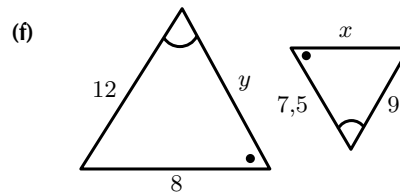
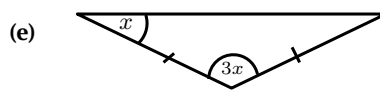
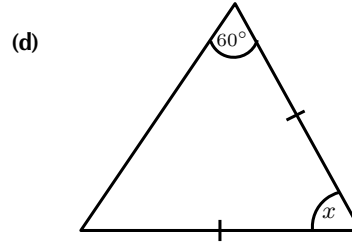
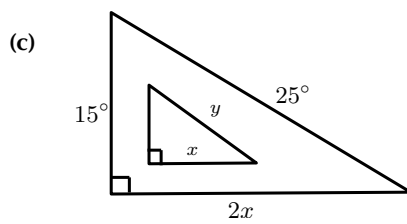
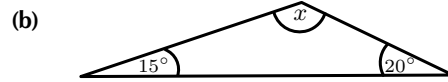
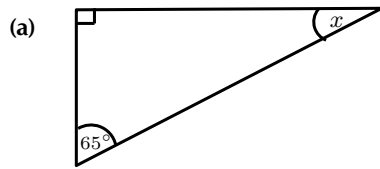
1. Identifiseer die soort hoek in elk van die volgende gevalle:



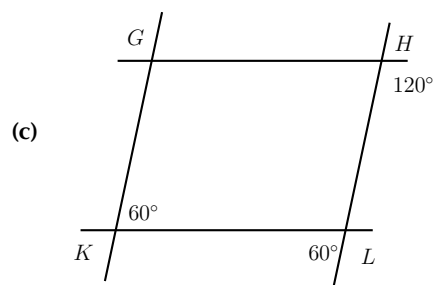
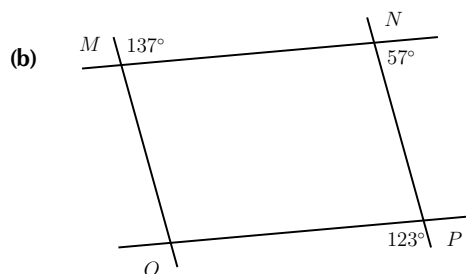
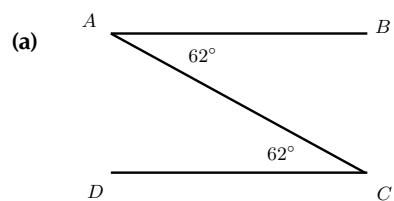
2. Bepaal of die volgende stellings waar of vals is. Indien die stelling vals is, verduidelik hoekom:

- (a) 'n Trapesium is 'n vierhoek met twee pare teenoorstaene sye ewewydig.
- (b) Beide hoeklyne van 'n parallelogram halveer mekaar.
- (c) 'n Reghoek is 'n parallelogram waarvan al vier die hoek hoeke ewe groot (90°).
- (d) Twee aangrensende sye van 'n ruit het verskillende lengtes.
- (e) Die hoeklyn van 'n vlieër sny mekaar loodreg.
- (f) Alle vierkante is parallelogramme.
- (g) 'n Ruit is 'n vlieër met 'n paar gelyke teenoorstaene sye.
- (h) Die hoeklyne van 'n parallelogram is asse van simmetrie.
- (i) Die vier sye van 'n ruit het verskillende lengtes.
- (j) Die hoeklyne van 'n vlieër sny mekaar teen 'n regte hoek.

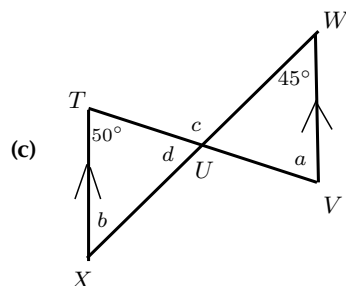
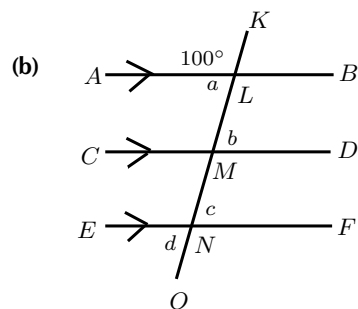
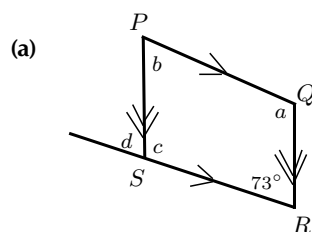
3. Bereken die grootte van x en van y in elk van die volgende gevalle:



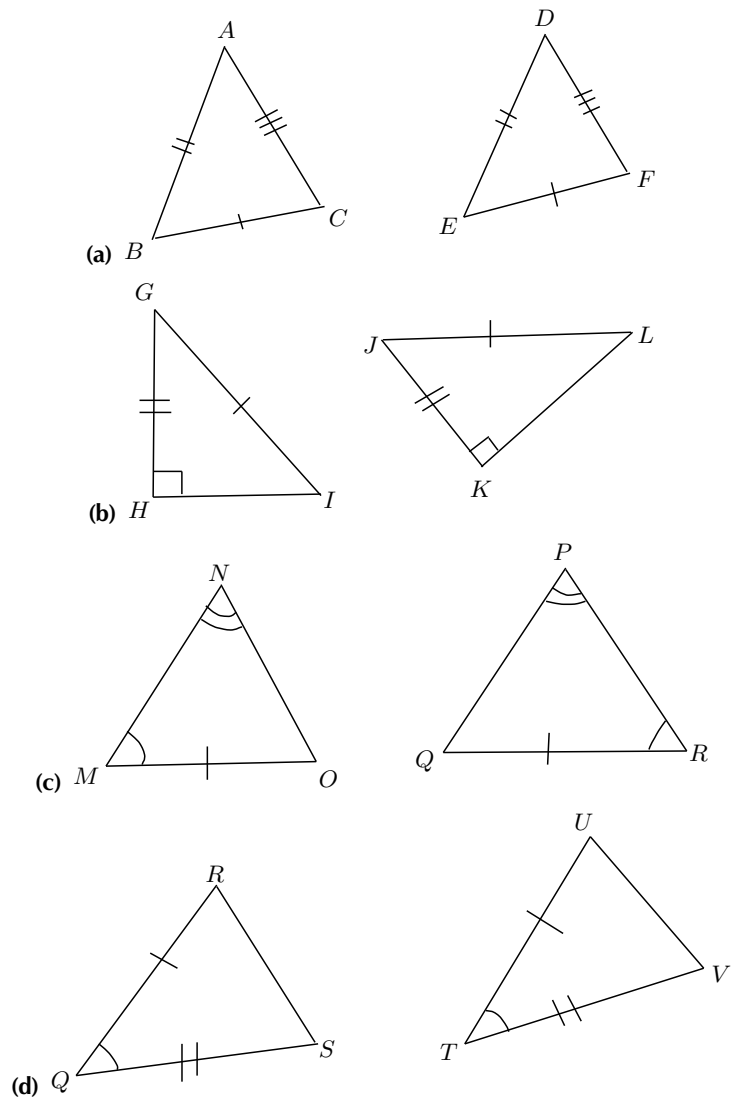
4. Identifiseer al die pare ewewydig lyne in die volgende figure en gee redes in elke geval.



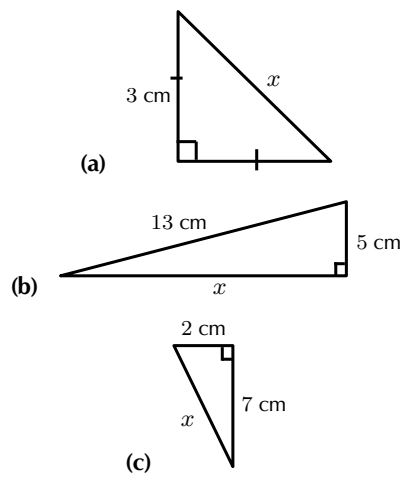
5. Vind hoeke a , b , c en d en gee redes in elke geval:

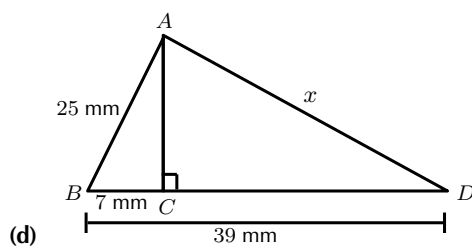


6. Identifiseer watter van die volgende pare driehoeke kongruent is en gee redes.

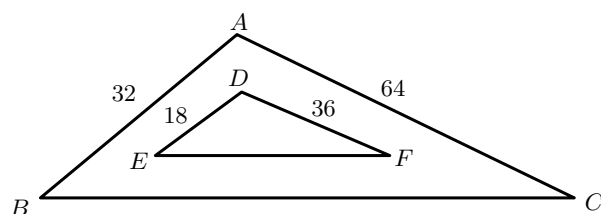


7. Bepaal met behulp van Pythagoras se stelling vir reghoekige driehoeke die lengte van x :

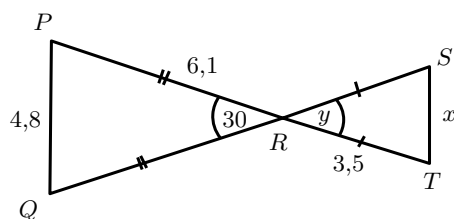




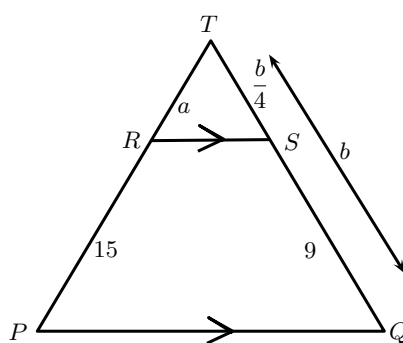
8. Beskou die diagram hieronder. Is $\triangle ABC \parallel \triangle DEF$? Gee redes vir jou antwoord.



9. Verduidelik waarom $\triangle PQR$ gelykvormig is aan $\triangle TRS$ en bereken die waardes van x en y .



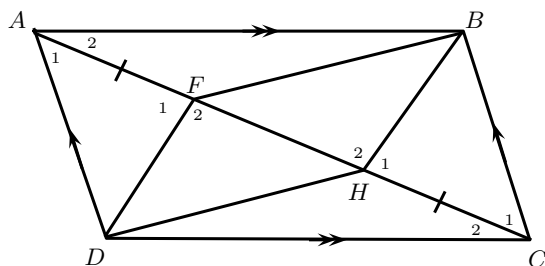
10. Bereken a en b :



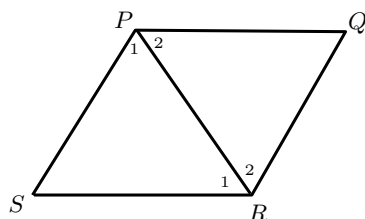
11. $ABCD$ is 'n parallelogram met hoeklyn AC .

As dit gegee word dat $AF = HC$, toon dat:

- (a) $\triangle AFD \equiv \triangle CHB$
- (b) $DF \parallel HB$
- (c) $DFBH$ is 'n parallelogram



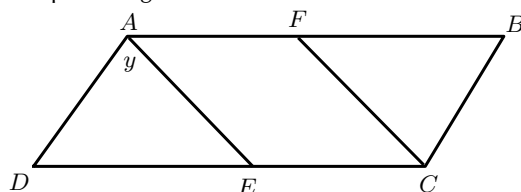
12. $\triangle PQR$ en $\triangle PSR$ is gelyksydige driehoeke. Bewys dat $PQRS$ 'n ruit is:



13. Gegee parallelogram $ABCD$ met AE wat $\hat{A}$ halveer en FC wat $\hat{C}$ halveer.

(a) Druk al die binnehoeke uit in terme van y .

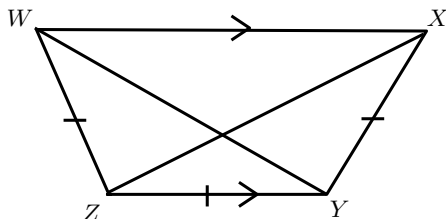
(b) Bewys $AFCE$ is 'n parallelogram.



14. Gegee $WZ = ZY = YX$ en $WX \parallel ZY$, bewys dat:

(a) XZ halveer $\hat{X}$

(b) $WY = XZ$



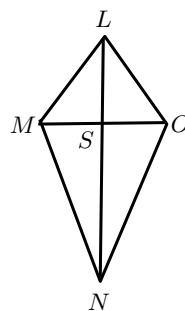
15. $LMNO$ is 'n vierhoek met $LM = LO$ en hoeklyne wat sny by S sodat $MS = SO$.

Bewys dat:

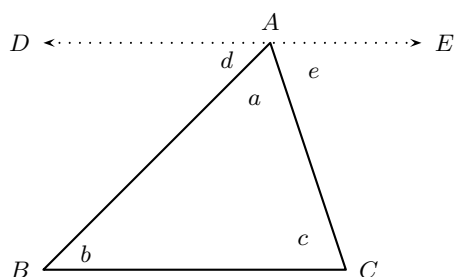
(a) $\hat{MLS} = \hat{SLO}$

(b) $\triangle LON \equiv \triangle LMN$

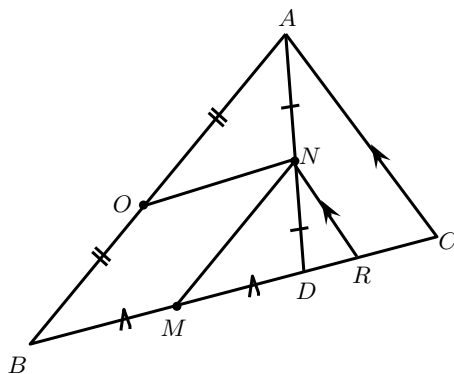
(c) $MO \perp LN$



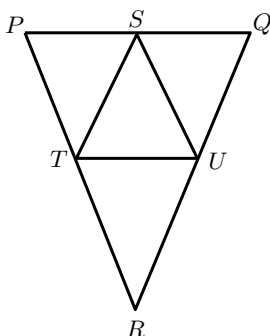
16. Gebruik die figuur hieronder en bewys dat die som van die hoeke van 'n driehoek gelyk is aan 180° . Lyn DE is ewewydig aan BC .



17. D is 'n punt op BC , in $\triangle ABC$. N is die middelpunt van AD . O is die middelpunt van AB en M is die middelpunt van BD . $NR \parallel AC$.

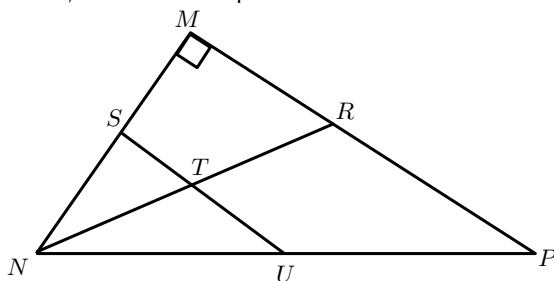


- (a) Bewys dat $OBMN$ 'n parallelogram is.
 (b) Bewys dat $BC = 2MR$.
18. PQR is 'n gelykbenige driehoek met $PR = QR$. S is die middelpunt van PQ , T is die middelpunt van PR en U is die middelpunt van RQ .



- (a) Bewys dat $\triangle STU$ ook gelykbenig is.
- (b) Watter soort vierhoek is $STRU$? Motiveer jou antwoord.
- (c) As $\hat{RTU} = 68^\circ$ bereken, met redes, die grootte van $\hat{T\hat{S}U}$.

19. In $\triangle MNP$, $M = 90^\circ$, S is die middelpunt van MN en T is die middelpunt van NR .



- (a) Bewys dat U die middelpunt van NP is.
- (b) As $ST = 4$ cm en die Oppervlak van $\triangle SNT$ 6 cm^2 is, bereken die Oppervlak van $\triangle MNR$.
- (c) Bewys dat die Oppervlak van $\triangle MNR$ sal altyd vier keer so groot as die Oppervlak van $\triangle SNT$ wees. Gestel $ST = x$ eenhede en $SN = y$ eenhede.

Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge

1. (a) Gestrekte hoek
 (b) Stomphoek
 (c) Skerphoek
 (d) Regte hoek
 (e) Inspringende hoek
 (f) Stomphoek
 (g) Regte hoek
 (h) Inspringende hoek
2. (a) Fals - 'n trapesium het net een paar teenoorstande ewewydig sye.
 (b) Waar.
 (c) Waar.
 (d) Fals - twee aangrensende sye van 'n ruit is gelyk in lengte.
 (e) Waar.
 (f) Waar.

- (g) Waar.
- (h) Fals - die hoeklyne van 'n ruit is nie gelyk in lengte nie.
- (i) Fals - net een hoeklyn van 'n vlieër halveer twee pare binnehoeke.
3. (a) $x = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$
- (b) $x = 180^\circ - 20^\circ - 15^\circ = 145^\circ$
- (c) $25^2 = 15^2 + (2x)^2$
 $4x^2 = 400$
 $x^2 = 100$
 $\therefore x = 10$ eenhede
 $\frac{x}{2x} = \frac{y}{25}$
 $\therefore y = 12,5$ eenhede
- (d) $x = 60^\circ$
- (e) $x + x + 3x = 180^\circ$
 $\therefore 5x = 180^\circ$
 $\therefore x = 36^\circ$
- (f) $\frac{x}{9} = \frac{8}{12}$
 $\therefore x = 6$ eenhede
 $\frac{y}{12} = \frac{7,5}{9}$
 $\therefore y = 10$ eenhede
4. (a) $AB \parallel CD$ (verwiss. binne $\angle$ 'e gelyk)
- (b) NP nie $\parallel MO$ nie (ooreen. $\angle$ 'e nie gelyk nie)
 $MN \parallel OP$ (ooreen. $\angle$ 'e gelyk)
- (c) $GH \parallel HL$ (ooreen. $\angle$ 'e gelyk)
5. (a) $a = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$ (ko-binne $\angle$ 'e)
 $b = 180^\circ - 107^\circ = 73^\circ$ (ko-binne $\angle$ 'e)
 $c = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$ ($\angle$ 'e op 'n reg. lyn)
 $d = 73^\circ$ (ooreen. $\angle$ 'e)
- (b) $a = 80^\circ$ ($\angle$ 'e op 'n reg. lyn)
 $b = 80^\circ$ (verwiss. binne $\angle$ 'e)
 $c = 80 - 73^\circ$ (ooreen. $\angle$ 'e)
 $d = 80^\circ$ (teen. $\angle$ 'e)
- (c) $a = 50^\circ$ (verwiss. binne $\angle$ 'e)
 $b = 45^\circ$ (verwiss. binne $\angle$ 'e)
 $c = 95^\circ$ (som of binne $\angle$ 'e)
 $d = 85^\circ$ (som of $\angle$ 'e in 'n $\triangle$)
6. (a) Kongruent by SSS
- (b) Kongruent by RSS
- (c) Kongruent by HHS
- (d) Kongruent by SHS
7. (a) $x = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 4,24$ cm
- (b) $x = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{139 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm
- (c) $x = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53} = 7,28$ cm
- (d) $AC = \sqrt{25^2 - 7^2} = 576$
 $\therefore AC = 24$
 $x^2 = 32^2 + 24^2$
 $\therefore x = 40$ mm

$$8. \frac{ED}{BA} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{32}{64} = \frac{9}{16}$$

Hierdie pare sye is in verhouding, $\therefore \triangle ABC \parallel \triangle DEF$

$$9. y = 30^\circ \text{ (teen. } \angle' \text{e)}$$

$$\frac{x}{4,8} = \frac{3,5}{6,1}$$

$$\therefore x = 2,75$$

$\hat{P} = \hat{Q}$ (gelyk $\angle' \text{e}$ teen. sye gelykbenig $\triangle$)

en $\hat{S} = \hat{T}$ (gelyk $\angle' \text{e}$ teen. sye gelykbenig $\triangle$)

$\therefore \triangle PQR \parallel \triangle TRS$ (HHH)

$$10. \frac{a}{a+15} = \frac{\frac{b}{4}}{b}$$

$$a = (a+15) \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$4a = a + 15$$

$$3a = 15$$

$$\therefore a = 5$$

$$b = \frac{b}{4} + 9$$

$$4b = b + 36$$

$$3b = 36$$

$$\therefore b = 12$$

$$11. (a) \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \text{ (verwiss. } \angle' \text{e, } AD \parallel BC)$$

$AD = BC$ (teen. sye van parallelogram gelyk)

$AF = HC$ (gegee)

$\therefore \triangle AFD \equiv \triangle CHB$ (SHS)

$$(b) \hat{F}_1 = \hat{H}_1 \text{ (} \triangle AFD \equiv \triangle CHB)$$

$\therefore \hat{F}_1 + \hat{F}_2 = 180^\circ$ ($\angle' \text{e}$ op reg. lyn)

en $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ ($\angle' \text{e}$ op reg. lyn)

$$\therefore \hat{F}_2 + \hat{H}_2$$

maar hierdie is verwisselende $\angle' \text{e}$,

$$\therefore DF \parallel HB$$

$$(c) FD = HB \text{ (} \triangle AFD \equiv \triangle CHB)$$

en $DF \parallel HB$ (gewys hierbo)

$\therefore DFBH$ is 'n parallelogram (een paar teen. sye gelyk en ewewydig)

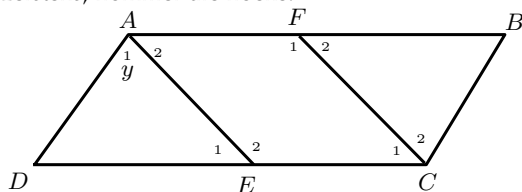
$$12. \text{ gegee } \triangle PSR \equiv \triangle PQR, \text{ met algemene sy } PR$$

$$PS = SR = PR = QR$$

$\therefore$ alle sye gelyk in lengte

$\therefore PQRS$ is 'n ruit

$$13. \text{ Eerstens, nummer die hoeke:}$$



$$(a) \hat{A}_2 = y \text{ (gegee } AE \text{ halweer } \hat{A})$$

$\hat{E}_1 = y$ (verwiss. $\angle' \text{e}$, $AB \parallel DC$ in parallelogram $ABCD$)

$$\therefore \hat{E}_2 = 180^\circ - y \text{ (}\angle\text{'e op reg. lyn)}$$

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 \text{ (gegees } FC \text{ halweer } \hat{C})$$

$$\text{en } \hat{A} = \hat{C} \text{ (teen. } \angle\text{'e parallelogram } ABCD \text{ gelyk)}$$

$$\therefore \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = y$$

$$\therefore \hat{F}_2 = \hat{C}_1 = y \text{ (verwiss. } \angle\text{'e, } AB \parallel DC)$$

$$\therefore \hat{F}_1 = 180^\circ - y$$

In $\triangle ADE$

$$\hat{D} + \hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 180^\circ \text{ (som van } \angle\text{'e in } \triangle)$$

$$\therefore \hat{D} + y + y = 180^\circ$$

$$\therefore \hat{D} = 180^\circ - 2y$$

$$\hat{D} = 90^\circ - y$$

$$\therefore \hat{B} = 90^\circ - y \text{ (teen. } \angle\text{'e parallelogram } ABCD \text{ gelyk)}$$

(b) $AF \parallel EC$ (teen. $\angle\text{'e parallelogram } ABCD$ gelyk)

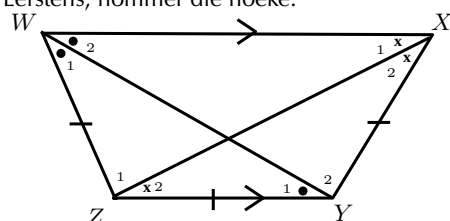
$$\text{en } \hat{C}_1 + \hat{E}_2 = y + (180^\circ - y)$$

$$\therefore \text{die som van die ko-binnehoeke is } 180^\circ$$

$$\therefore AE \parallel FC$$

$$\therefore AFCE \text{ is 'n parallelogram (albei teen. sye ewewydig)}$$

14. Eerstens, nommer die hoeke:



(a) In $\triangle XYZ$

$$\hat{X}_2 = \hat{Z}_2 \text{ (}\angle\text{'e teen. gelyke sye van gelykbenig } \triangle)$$

$$\text{en } \hat{X}_1 = \hat{Z}_2 \text{ (verwiss. } \angle\text{'e, } WX \parallel ZY)$$

$$\therefore \hat{X}_1 = \hat{X}_2$$

$$\therefore XZ \text{ halweer } \hat{X}$$

(b) Soortgelyk, WY halweer $\hat{W}$

$$\therefore \hat{W}_1 = \hat{W}_2$$

$$\text{en } \hat{W} = \hat{X} \text{ (gegees)}$$

$$\therefore \hat{W}_1 = \hat{W}_2 = \hat{X}_1 = \hat{X}_2$$

$$\text{en } \hat{W}_1 = \hat{Y}_1 \text{ (}\angle\text{'e teen. gelyke sye)}$$

In $\triangle WZY$ en $\triangle XYZ$

$$WZ = XY \text{ (gegees)}$$

ZY is 'n algemene sy

$$\hat{Z} = \hat{Y} \text{ (derde } \angle \text{ in } \triangle)$$

$$\therefore \triangle WZY \equiv \triangle XYZ \text{ (SHS)}$$

15. (a) In $\triangle LMS$ en $\triangle LOS$

$$LM = LO \text{ (gegees)}$$

$$MS = SO \text{ (gegees)}$$

LS is 'n algemene sy

$$\therefore \triangle LMS \equiv \triangle LOS \text{ (SSS)}$$

$$\therefore \hat{L}_1 = \hat{L}_2$$

(b) In $\triangle LON$ en $\triangle LMN$

$$LO = LM \text{ (gegees)}$$

$$\hat{L}_1 = \hat{L}_2 \text{ (gewys hierbo)}$$

LN 'n algemene sy

$$\therefore \triangle LON \equiv \triangle LMN \text{ (SSS)}$$

$$\therefore \hat{L}_1 = \hat{L}_2$$

(c) In $\hat{M}_1 = \hat{O}_1$ ($\triangle LON \equiv \triangle LMN$)

$$\text{en } \hat{L}_1 = \hat{L}_2 \text{ (gewys hierbo)}$$

$$\therefore \text{in } \triangle LMO$$

$$\hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \hat{M}_1 + \hat{O}_1 = 180^\circ \text{ (som van } \angle \text{'e in } \triangle)$$

$$\therefore 2\hat{L}_1 + 2\hat{O}_1 = 180^\circ$$

$$2(\hat{L}_1 + \hat{O}_1) = 180^\circ$$

$$\hat{L}_1 + \hat{O}_1 = 90^\circ$$

$$\text{maar } \hat{S}_1 = \hat{O}_1 + \hat{L}_2 \text{ (buite } \angle \text{ van } \triangle = \text{som binne teen. } \angle \text{'e)}$$

$$\therefore \hat{S}_1 = 90^\circ$$

$$\therefore MO \perp LN$$

16. $DE \parallel BC$

$$e = c \text{ (verwiss. binne } \angle \text{'e)}$$

$$d = b \text{ (verwiss. binne } \angle \text{'e)}$$

$$\text{Ons weet dat } d + a + e = 180^\circ$$

en ons het gewys dat $e = c$ en $d = b$ dus kan ons d en e in die diagram vervang om te kry:

$$a + b + c = 180^\circ$$

Dus voeg die hoeke in 'n driehoek tot 180° .

17. (a) $AO = OB$ (gegees)

$$AN = ND \text{ (gegees)}$$

$$\therefore ON \parallel BD \text{ (middelpunt stelling)}$$

$$BM = MD \text{ (gegees)}$$

$$AN = ND \text{ (gegees)}$$

$$\therefore MN \parallel AB$$

$$\therefore OBMN \text{ is 'n parallelogram (teen. sye ewewydig)}$$

(b) $AN = NC$ (gegees)

$$NR \parallel AC \text{ (gegees)}$$

$$\therefore DR = RC \text{ (middelpunt stelling)}$$

$$\therefore DR = \frac{1}{2}DC$$

$$MD = \frac{1}{2}BD \text{ (gegees)}$$

$$\therefore MD + DR = \frac{1}{2}(BD + DC)$$

$$MR = \frac{1}{2}BC$$

$$\therefore BC = 2MR$$

18. (a) $PT = \frac{1}{2}PR$ (gegees)

S middelpunt van PQ

U middelpunt van RQ

$$SU = \frac{1}{2}PR$$

$$\therefore SU = PT$$

S middelpunt van PQ

T middelpunt van PR

$$\therefore ST = \frac{1}{2}QR = QU$$

Maar $PR = QR$ (gegeef)

$$\therefore SU = ST$$

$\therefore \triangle STU$ is gelykbenig.

(b) $STRU$ is 'n ruit. Dit is 'n parallelogram ($SU \parallel TR$ en $ST \parallel UR$) met vier gelyke sye ($US = ST = TR = RU$).

(c) $\hat{RTU} = 68^\circ$

$$\therefore \hat{TUS} = 68^\circ \text{ (verwiss. } \angle\text{'e, } TR \parallel SU)$$

$$\therefore \hat{STU} = 68^\circ \text{ (} SU = ST)$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{T\hat{S}U} &= 180^\circ - 136^\circ \\ &= 44^\circ \end{aligned}$$

19. (a) $NS = SM$ (gegeef)

$$NT = TR \text{ (gegeef)}$$

$$\therefore ST \parallel MR \text{ (middelpunt stelling)}$$

(b) $\hat{NST} = 90^\circ$

$$\therefore \text{Oppervlak } \triangle SNT = \frac{1}{2}ST(SN) \text{ (ooreen. } \angle\text{'e, } ST \parallel MR)$$

$$6 = \frac{1}{2}(4)SN$$

$$\therefore SN = 3 \text{ cm}$$

$$\therefore MN = 6 \text{ cm}$$

$$MR = 2ST = 8 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{Oppervlak } \triangle MNR &= \frac{1}{2}MR \times MN \\ &= \frac{1}{2}(8)(6) \\ &= 24 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(c) Laat ST x eenhede wees

$$\therefore MR \text{ sal } 2x \text{ wees}$$

Laat SN y eenhede wees

$$\therefore MN \text{ sal } 2y \text{ wees}$$

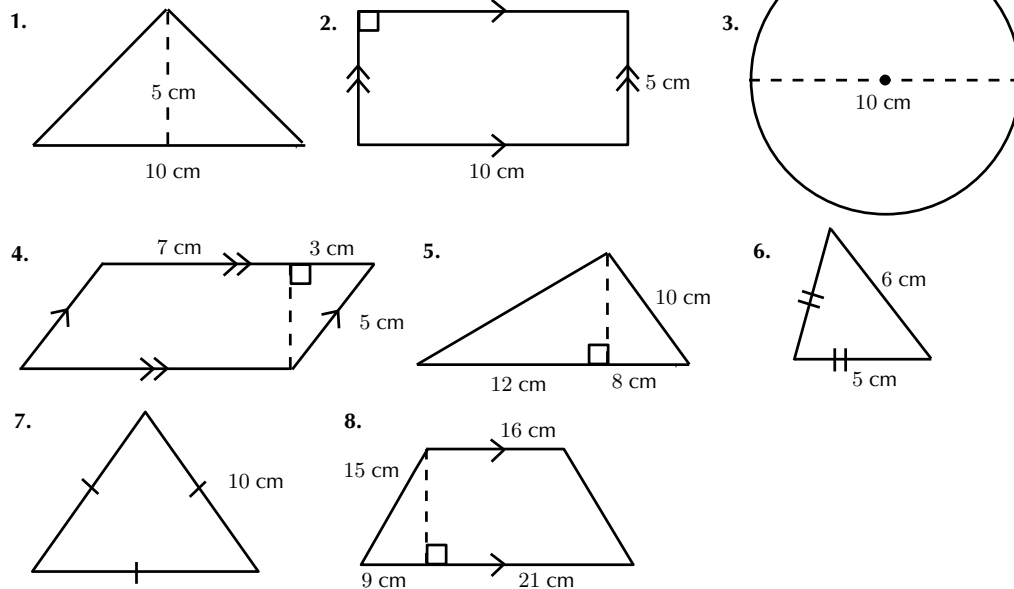
$$\begin{aligned} \text{Oppervlak } \triangle SNT &= \frac{1}{2}xy \\ &\frac{1}{2}xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Oppervlak } \triangle MNR &= \frac{1}{2}(2x)(2y) \\ &= 2xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Oppervlak } \triangle MNR &= 4\left(\frac{1}{2}xy\right) \\ &= 4(\text{Oppervlak } \triangle SNT) \end{aligned}$$

Oefening 12 - 1

Vind die oppervlakte vir elk van die gegewe figure:



Oplossings vir Oefening 12 - 1

1. $A = \frac{1}{2} \text{basis} \times \text{hoogte}$
 $A = \frac{1}{2}(10)(5)$
 $A = 25 \text{ cm}^2$
2. $A = \text{lengte} \times \text{breedte}$
 $A = (10)(5)$
 $A = 50 \text{ cm}^2$
3. $A = \pi r^2$
 $A = 3,14159(5^2)$

$$A = 78,5398 \text{ cm}^2$$

$$A \approx 79 \text{ cm}^2$$

Let op dat die radius die helfte van die deursnee is.

4. $A = \text{basis} \times \text{loodregte hoogte}$

$$A = (10)(\sqrt{5^2 - 3^2})$$

$$A = (10)(4)$$

$$A = 40 \text{ cm}^2$$

5. $h^2 = 10^2 + 8^2$

$$h = \sqrt{164}$$

$$h = 12,81 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} \text{basis} \times \text{hoogte}$$

$$A = \frac{1}{2}(12,81)(20)$$

$$A \approx 128 \text{ cm}^2$$

6. Ons moet eerstens die loodregte hoogte bou. As ons dit doen sodat ons die basis in die helfte verdeel kry ons:

$$h^2 = 3^2 + 5^2$$

$$h = \sqrt{34}$$

$$h = 5,83 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} \text{basis} \times \text{hoogte}$$

$$A = \frac{1}{2}(6)(5,83)$$

$$A = 17,5 \text{ cm}^2$$

7. Ons bou weer die loodregte hoogte. As ons dit doen sodat ons die basis in die helfte verdeel kry ons:

$$h^2 = 10^2 + 5^2$$

$$h = \sqrt{125}$$

$$h = 11,18 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} \text{basis} \times \text{hoogte}$$

$$A = \frac{1}{2}(10)(11,18)$$

$$A = 60 \text{ cm}^2$$

8. $h^2 = 15^2 + 9^2$

$$h = \sqrt{306}$$

$$h = 17,49 \text{ cm}$$

$$A = \text{basis} \times \text{hoogte}$$

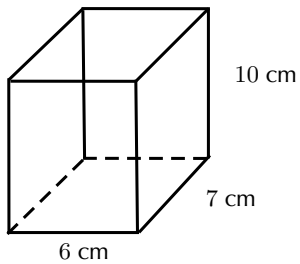
$$A = (30)(17,49)$$

$$A = 525 \text{ cm}^2$$

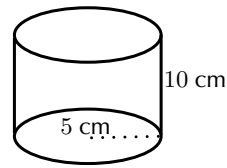
Oefening 12 - 2

1. Bereken die buite-oppervlaktes van die volgende prisma's:

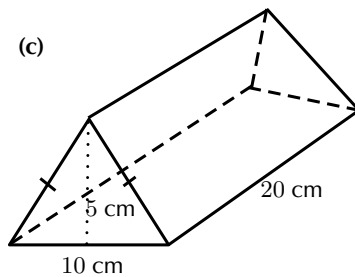
(a)



(b)

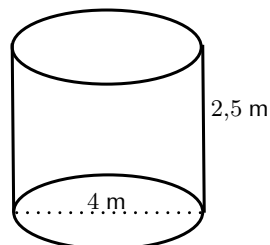


(c)



2. As 'n liter verf nodig is vir 'n oppervlakte van 2 m^2 , bereken hoeveel verf die verwer nodig het om die volgende oppervlaktes te verf:

- (a) 'n Reghoekige swembad met binnewande en bodem met die volgende afmetings: $4 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$ (slegs binnewande en vloer).
- (b) 'n Sirkelvormige opgaardam waarvan die bodem 'n middellyn het van 4 m en met 'n diepte van 2,5 m.



Oplossings vir Oefening 12 - 2

1. (a) Groot reghoek = omtrek van klein reghoek $\times$ lengte
 $= (10 + 7 + 10 + 7) \times 6$
 $= 34 \times 6$
 $= 204 \text{ cm}^2$
 $2 \times \text{klein reghoek} = 2(7 \times 10)$
 $= 2(70)$
 $= 140 \text{ cm}^2$
Groot reghoek + $2 \times (\text{klein reghoek}) = 204 + 140 = 344 \text{ cm}^2$

(b) Oppervlak van groot reghoek = omtrek van sirkel $\times$ lengte

$$= 2\pi \times r \times l$$

$$= 2\pi \times (5) \times 10$$

$$= 314,16 \text{ cm}^2$$

$$\text{Oppervlak van sirkel} = \pi r^2$$

$$= \pi 5^2$$

$$= 78,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Buite-oppervlak} = \text{oppervlak groot reghoek} + 2(\text{oppervlak van sirkel})$$

$$= 314,16 + 2(78,5)$$

$$= 471,2 \text{ cm}^2$$

(c) $x^2 = 5^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$

$$x^2 = 5^2 + 5^2$$

$$= 25 + 25$$

$$x = \sqrt{50}$$

$$x = 7,07 \text{ cm}$$

$$\text{Omtrek van driehoek} = 10 + 7,07 + 7,07$$

$$= 24,14 \text{ cm}$$

$$\text{Oppervlak van groot reghoek} = \text{omtrek van driehoek} \times \text{lengte}$$

$$= 24,14 \times 20$$

$$= 482,8 \text{ cm}^2$$

$$\text{Oppervlak van driehoek} = \frac{1}{2}b \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 10$$

$$= 25 \text{ cm}^2$$

$$\text{Buite-oppervlak} = \text{oppervlak groot reghoek} + 2(\text{oppervlak van driehoek})$$

$$= 482,8 + 2(25) = 532,8 \text{ cm}^2$$

2. (a) Buite-oppervlak = oppervlak van bottom van pool + 2(oppervlak van long kante) +

$$2(\text{oppervlak van short kante})$$

$$= (4 \times 3) + 2(4 \times 2,5) + 2(3 \times 2,5)$$

$$= 12 + 20 + 15$$

$$= 47 \text{ m}^2$$

Die skilder sal $\frac{47}{2} = 24$ liter verf nodig hê (af rond tot by die naaste liter).

(b) Ons moet eerstens r bereken:

$$r = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

$$\text{Buite-oppervlak} = \text{oppervlak van bottom van opgaardam} + \text{oppervlak van binnekant van opgaardam}$$

$$= (\pi r^2) + (\text{omtrek van basis} \times \text{hoogte van opgaardam})$$

$$= (\pi(2)^2) + (2(\pi)(2) \times 2,5 \text{ m})$$

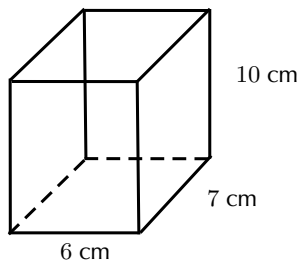
$$= 43,98 \text{ m}$$

TDie skilder sal $\frac{44}{2} = 22$ liter verf nodig hê (af rond tot by die naaste liter).

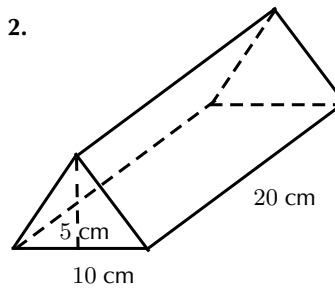
Oefening 12 - 3

Bereken die volume van elkeen van die volgende prisma's (korrek tot 1 desimale plek):

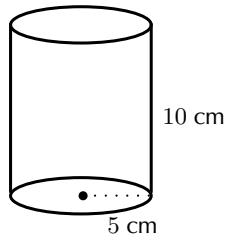
1.



2.



3.



Oplossings vir Oefening 12 - 3

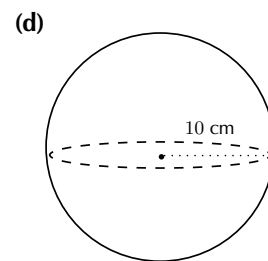
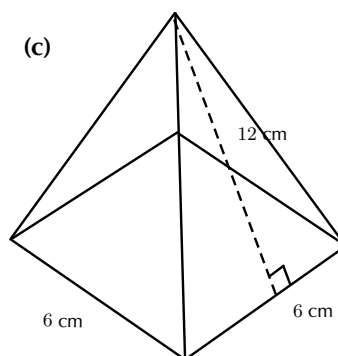
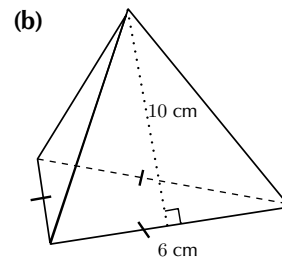
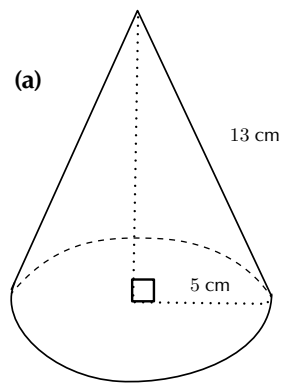
$$\begin{aligned} 1. \quad V &= L \times b \times h \\ &= 6 \times 7 \times 10 \\ &= 420 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad V &= \frac{1}{2} \times h \times b \times H \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \times 20 \\ &= 500 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

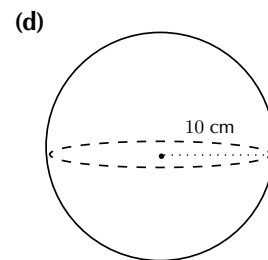
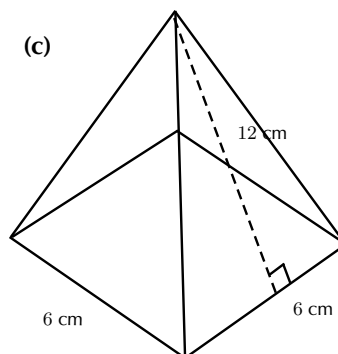
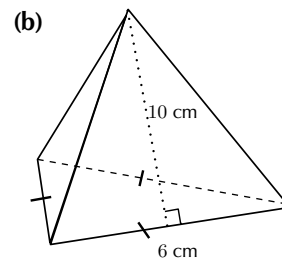
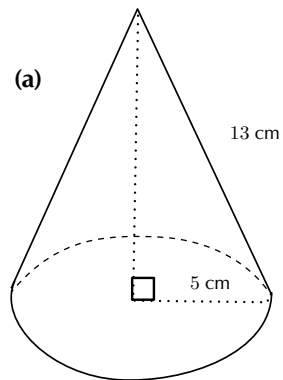
$$\begin{aligned} 3. \quad V &= \pi r^2 h \\ &= \pi (5)^2 (10) \\ &= 785,4 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Oefening 12 - 4

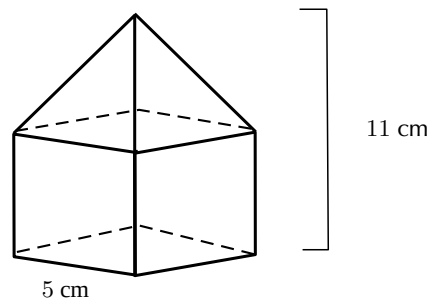
1. Vind die totale buite-oppervlaktes van die volgende prisma (korrek tot 1 desimale plek indien nodig):



2. Vind die volumes van die volgende prisma's (korrek tot 1 desimale plek waar nodig):



3. Die vaste liggaam bestaan uit 'n kubus en 'n vierkantige piramide. Vind die volume en buite-oppervlak van die voorwerp (korrek tot 1 desimale plek):



Oplossings vir Oefening 12 - 4

1. (a) Buite-oppervlak = oppervlak van basis + oppervlak van walls

$$= \pi r(r + h_s)$$

$$= \pi 5(5 + 13)$$

$$= 282,74 \text{ cm}^2$$

- (b) Ons moet eerstens h_b vind:

$$(h_b)^2 = (b)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$= 36 - 9$$

$$= 27$$

$$h_b = 5,20 \text{ cm}$$

Buite-oppervlak = oppervlak van basis + oppervlak van driehoekige kante

$$= \frac{1}{2}b(h_b + 3h_s)$$

$$= \frac{1}{2}6(5,20 + 10)$$

$$= 45,6 \text{ cm}^2$$

- (c) Buite-oppervlak = oppervlak van basis + oppervlak van driehoekige kante

$$= b(b + 2h)$$

$$= 6(6 + 2(12))$$

$$= 180 \text{ cm}^2$$

- (d) Buite-oppervlak = $4\pi r^2$

$$= 4\pi(10)^2$$

$$= 1\,256,64 \text{ cm}^2$$

2. (a) Volume = $\frac{1}{3} \times \pi(r)^2 \times H$

$$= \frac{1}{3}\pi(5)^2(13)$$

$$= 108,33 \text{ cm}^3$$

- (b) Ons moet eerstens h vind:

$$(h)^2 = (b)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$= 36 - 9$$

$$= 27$$

$$h = 5,20 \text{ cm}$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}bh \times H$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(27)(6) \times (10)$$

$$= 270 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{(c) Volume} &= \frac{1}{3} \times b^2 \times H \\ &= \frac{1}{3}(6)^2(12) \\ &= 144 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d) Volume} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(10)^3 \\ &= 4\,188,79 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Volume} &= \text{volume kubus} + \text{volume van vierkantige piramide} \\ &= (5 \times 5 \times 5) + \frac{1}{3}(5 \times 5 \times (11 - 5)) \\ &= 175 \text{ cm}^3 \\ \text{Buite-oppervlak} &= 5(\text{kante van kubus}) + 4(\text{driehoek faces van piramide}) \\ &= 5(5 \times 5) + 4\left(\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{13}{2}\right) \\ &= 190 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Oefening 12 - 5

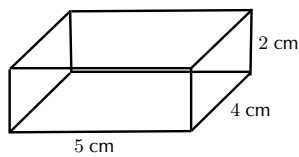
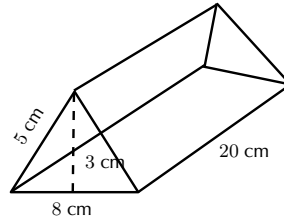
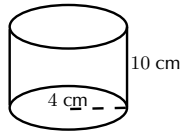
- As die hoogte van 'n prisma verdubbel, met hoeveel sal die volume toeneem?
- Beskryf die verandering in die volume van 'n reghoekige prisma as:
 - die lengte en die breedte vermeerder met 'n konstante faktor van 3.
 - lengte, breedte en hoogte vermenigvuldig word met 'n konstante faktor van 2.
- Gegewe 'n prisma met 'n volume van 493 cm^3 en 'n buite-oppervlakte van $6\,007 \text{ cm}^2$, vind die nuwe buite-oppervlakte en volume vir die prisma as al die afmetings vermeerder word met 'n konstante faktor van 4.

Oplossings vir Oefening 12 - 5

- Volume van prisma = oppervlak van basis $\times$ hoogte van prisma
 nuwe volume = oppervlak van basis $\times 2 \times$ hoogte
 Dus is die nuwe volume twee keer so groot as die ou volume, as die hoogte verdubbel is.
- Volume sal 9 keer groter wees ($3 \times 3 = 3^2 = 9$).
 - Volume sal 27 keer groter wees ($3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$).
- $$\begin{aligned} \text{Volume} &= 493 \times 4^3 \\ &= 31\,552 \text{ cm}^3 \\ \text{Buite-oppervlak} &= 6\,007 \times 4^2 \\ &= 96\,112 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

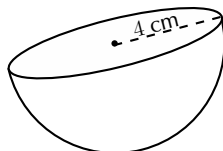
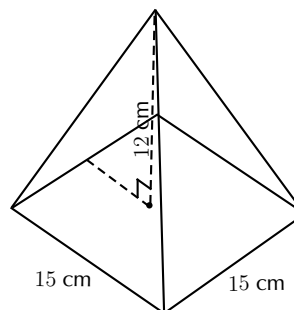
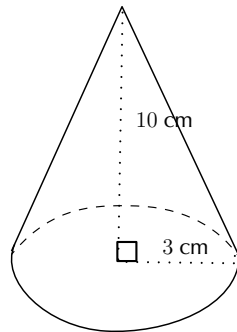
Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Beskou die vaste liggame hieronder en beantwoord die vrae wat volg (korrek tot 1 desimale plek waar nodig):

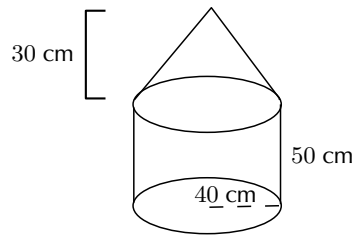


- Bereken die buite-oppervlakte van elke vaste liggaam.
- Bereken die volume van elke voorwerp.
- As elke afmeting van die voorwerpe vermeerder met 'n faktor van 3, bereken die nuwe buite-oppervlakte van elk.
- As elke afmeting van die voorwerpe vermeerder met 'n faktor van 3, bereken die nuwe volume van elk.

2. Beskou die vaste (soliede) liggame hieronder:



- Bereken die buite-oppervlakte van die soliede liggame.
 - Bereken die volumes van die soliede liggame.
3. Bereken die volume en buite-oppervlakte van die volgende soliede liggaam (korrek tot 1 desimale plek):



Oplossings vir Einde van hoofstuk oefeninge

1. (a) Silinder:

$$\begin{aligned}\text{Buite-oppervlak} &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ &= 2\pi(4)^2 + 2\pi(4)(10) \\ &= 351,9 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Driehoekige prisma:

$$\begin{aligned}\text{Buite-oppervlak} &= 2\left(\frac{1}{2}b \times h\right) + 2(H \times S) + (H \times b) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}(8)(3)\right) + 2(20 \times 5) + (20 \times 8) \\ &= 384 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Reghoekige prisma:

$$\begin{aligned}\text{Buite-oppervlak} &= 2[(L \times b) + (b \times h) + (L \times h)] \\ &= 2[(5 \times 4) + (4 \times 2) + (5 \times 2)] \\ &= 72 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

(b) Silinder:

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \pi r^2 h \\ &= \pi(4)^2(10) \\ &= 502,7 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Driehoekige prisma:

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \frac{1}{2} \times h \times b \times H \\ &= \frac{1}{2}(3)(8)(20) \\ &= 240 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Reghoekige prisma:

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= L \times b \times h \\ &= 5 \times 4 \times 2 \\ &= 40 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

(c) Silinder:

$$\begin{aligned}\text{Buite-oppervlak} &= 2\pi(3r)^2 + 2\pi(3r)(3h) \\ &= 2\pi 9(4)^2 + 2\pi(9)(4)(10) \\ &= 3\,166,7 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Driehoekige prisma:

$$\begin{aligned}\text{Buite-oppervlak} &= 2\left(\frac{1}{2}b \times h\right) + 2(H \times S) + (H \times b) \\ &= 2\left(\frac{9}{2}(8)(3)\right) + 18(20 \times 5) + 9(20 \times 8) \\ &= 3\,456 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Reghoekige prisma:

$$\begin{aligned}\text{Buite-oppervlak} &= 2[9(L \times b) + 9(b \times h) + 9(L \times h)] \\ &= 2[9(5 \times 4) + 9(4 \times 2) + 9(5 \times 2)]\end{aligned}$$

$$= 684 \text{ cm}^2$$

(d) Silinder:

$$\text{Volume} = \pi(3r)^2 3h$$

$$\pi(3(4))^2(3(10))$$

$$= 13\,571,9 \text{ cm}^3$$

Driehoekige prisma:

$$\text{Volume} = \frac{1}{2} \times h \times b \times H$$

$$= \frac{27}{2}(3)(8)(20)$$

$$= 6480 \text{ cm}^3$$

Reghoekige prisma:

$$\text{Volume} = 27(L \times b \times h)$$

$$= 27(5 \times 4 \times 2)$$

$$= 1080 \text{ cm}^3$$

2. (a) Regte keël:

$$\text{Buite-oppervlak} = \pi r^2 + 2\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \pi(3)^2 + 2\pi(3)\sqrt{(3)^2 + (10)^2}$$

$$= 225 \text{ cm}^2$$

Vierkantige piramide:

$$\text{Buite-oppervlak} = 4(\frac{1}{2}bh) + A$$

$$= 4(\frac{1}{2}(15)(12)) + 15^2$$

$$= 585 \text{ cm}^2$$

Helfte sfeer:

$$\text{Buite-oppervlak} = \frac{4\pi r^2}{2}$$

$$= 100 \text{ cm}^2$$

(b) Regte keël:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 10$$

$$= 94 \text{ cm}^3$$

Vierkantige piramide:

$$V = \frac{1}{3}A \times h$$

$$= \frac{1}{3}(15)^2 \times 12$$

$$= 900 \text{ cm}^3$$

Helfte sfeer:

$$V = \frac{(\frac{4}{3}\pi r^3)}{2}$$

$$= \frac{(\frac{4}{3}\pi(4)^3)}{2}$$

$$= 134 \text{ cm}^3$$

3. Buite-oppervlak:

Silinder:

$$\text{Buite-oppervlak} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$= 2\pi(40)^2 + 2\pi(40)(50)$$

$$= 22\,619,5 \text{ cm}^2$$

Regte keël:

$$\text{Buite-oppervlak} = 2\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= 2\pi(40)\sqrt{40^2 + 30^2}$$

$$= 12\,566,4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Total buite-oppervlak} = 22\,619,5 + 12\,566,4 = 35\,185,9 \text{ cm}^2$$

Volume:

Silinder:

$$\begin{aligned}V &= \pi r^2 h \\&= \pi (40)^2 (50) \\&= 251\,327,4 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Regte keel:

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h^2 \\&= \frac{1}{3} \pi (40)^2 (50)^2 \\&= 83\,775,8 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\text{Totale volume} = 251\,327,4 + 83\,775,8 = 335\,103,2 \text{ cm}^3$$